

# GAUSSABSCHÄTZUNGEN FÜR WÄRMELEITUNGSKERNE

MICHAEL WALTER

Es sei  $(\Omega, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum. Wir bezeichnen die komplexwertigen messbaren Funktionen auf  $\Omega$  mit  $L^0 := L^0(\Omega; \mathbb{C})$ . Allgemein schreiben wir immer  $L^p := L^p(\Omega, \mu; \mathbb{C})$  und  $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p}$ . Unsere Halbgruppen sind immer stark stetig.

## 1. EINFÜHRUNG

**Wärmeleitungskerne.** Unter bestimmten Voraussetzungen besitzt eine Halbgruppe  $(e^{-At})_{t \geq 0}$  auf  $L^2$  mit selbstadjungiertem Erzeuger  $A$  einen *Kern*  $(p_t)_{t \geq 0}$ , d.h. es existieren  $p_t \in L^0(\Omega \times \Omega)$  mit

$$(e^{-At}u)(x) = \int_{\Omega} p_t(x, \cdot)u \, d\mu \quad (\text{a.e.}, \forall t > 0, u \in L^2)$$

Dieser Kern heißt *Wärmeleitungskern* falls er einer Abschätzung

$$\|p_t\|_{\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{2}} \quad (\text{a.e.}, \forall t > 0)$$

genügt.

**Beispiel 1.** Der *Gaußkern*

$$g_t(x, y) := (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)$$

ist der Wärmeleitungskern der *Gaußhalbgruppe*  $(e^{-\Delta t})$ , die vom Laplace-Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$  erzeugt wird.

**$L^2$ - $L^\infty$ -Abschätzungen.** Hinreichende Voraussetzungen für die Existenz eines Wärmeleitungskerns sind  $L^2$ - $L^\infty$ -Abschätzungen der Form

$$\|e^{-At}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} \quad (\forall t > 0),$$

welche wir in Abschnitt 2 untersuchen werden. Man erhält nämlich durch Dualisieren die gleiche Abschätzung für  $\|e^{-At}\|_{L^1 \rightarrow L^2}$ ; es folgt

$$\|e^{-At}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \lesssim \|e^{-A\frac{t}{2}}\|_{L^1 \rightarrow L^2} \|e^{-A\frac{t}{2}}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{2}} \quad (\forall t > 0),$$

und das garantiert die Existenz eines Wärmeleitungskerns.

**Gaußabschätzungen.** Besitzt die Halbgruppe nun einen solchen Wärmeleitungskern, so ist es oft interessant, ihn mit dem Gaußkern zu vergleichen (vgl. Einführung und Bibliographie in [CS08]). In Abschnitt 3 werden wir deshalb zeigen, dass ein gleichmäßig elliptischer Operator unter bestimmten Voraussetzungen sogenannte *Gaußabschätzungen* der Form

$$|p_t(x, y)| \lesssim_{\epsilon} |g_{\delta t}(x, y)| e^{(\delta\alpha + \epsilon)t} \quad (\text{a.e.}, \forall t > 0, \epsilon > 0)$$

zulässt.

Diese Ausarbeitung basiert auf [Ouh05, Kapitel 6].

2.  $L^2$ - $L^\infty$ -ABSCHÄTZUNGEN

**Voraussetzungen.** In diesem Abschnitt sei  $\mathfrak{a}$  eine dicht definierte, symmetrische, akkretive, stetige und abgeschlossene Form auf  $L^2$ . Der assoziierte Operator  $A$  ist dann akkretiv und selbstadjungiert und die zugehörige Halbgruppe  $(e^{-At})_{t \geq 0}$  eine Kontraktionshalbgruppe auf  $L^2$ . Wir fordern desweiteren, dass die Halbgruppe  $L^\infty$ -kontraktiv ist<sup>1</sup>. Damit ist sie auch  $L^p$ -kontraktiv für alle  $p \in (2, \infty)$ .

**Erinnerungen.** Aus den Forderungen an  $\mathfrak{a}$  ergibt sich die Existenz einer akkretiven selbstadjungierten *Quadratwurzel*  $A^{\frac{1}{2}}$  von  $A$ . Es gilt  $D(A^{\frac{1}{2}}) = D(\mathfrak{a})$  und

$$\mathfrak{a}(u, v) = \langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v \rangle_2$$

(siehe [Ouh05, Kapitel 8]). Ist  $A^{\frac{1}{2}}$  außerdem injektiv so existiert die Inverse; sie ist dicht definiert und hat folgende Integraldarstellung:

$$(1) \quad A^{-\frac{1}{2}}u = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-At} u \, dt$$

(vgl. [KW04, Corollary 15.20]).

Aus der Analytizität der Halbgruppe ergeben sich noch folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|Ae^{-At}\| &\lesssim t^{-1} \\ \|A^{\frac{1}{2}}e^{-At}\| &\lesssim t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

**Extrapolation.** Das folgende Lemma liefert  $L^2$ - $L^\infty$ -Abschätzungen durch Extrapolation. Es gilt sogar für beliebige Halbgruppen auf  $L^2$ , soweit diese nur  $L^\infty$ -kontraktiv sind.

**Lemma 2** (Extrapolation). *Für Konstanten  $r \geq 2$  und  $C, \alpha > 0$  gelte*

$$\|e^{-At}\|_{L^2 \rightarrow L^r} \leq Ct^{-\alpha} \quad (\forall t > 0)$$

Dann folgt

$$\|e^{-At}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{\alpha r}{r-2}} \quad (\forall t > 0)$$

*Beweis.* Riesz-Thorin-Interpolation zwischen  $L^2$ - $L^r$  und  $L^\infty$ - $L^\infty$  liefert für alle  $p \in [2, \infty)$  die folgende Abschätzung ( $\theta = \frac{2}{p}$ ,  $q = \frac{pr}{2}$ ):

$$\|e^{-At}\|_{L^p \rightarrow L^{pr/2}} \leq C^{\frac{2}{p}} t^{-\frac{2\alpha}{p}} \quad (\forall t > 0)$$

Sie erlaubt es, dass wir uns sukzessive (jeweils um den Faktor  $\frac{r}{2} > 1$ ) der gesuchten Norm nähern. Dafür setzen wir  $t_k := \frac{r-1}{r} r^{-k}$  und  $p_k := 2(\frac{r}{2})^k$ . Dann gelten nämlich  $\sum t_k = 1$  sowie  $\sum \frac{1}{p_k} = \frac{r}{2(r-2)}$ , und wir erhalten für alle  $u \in L^2 \cap L^\infty$

$$\|e^{-At}u\|_{p_n} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \|e^{-Att_k}\|_{L^{p_k} \rightarrow L^{p_{k+1}}} \cdot \underbrace{\|e^{-At(1-\sum_{k=0}^{n-1} t_k)}\|_{L^{p_n} \rightarrow L^{p_n}}}_{\leq 1} \cdot \|u\|_2,$$

und damit durch Grenzübergang wegen der Dichtheit die Behauptung:

$$\|e^{-At}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \leq \prod_k C^{\frac{2}{p_k}} (tt_k)^{-\frac{2\alpha}{p_k}} \lesssim t^{-\frac{\alpha r}{r-2}}$$

□

<sup>1</sup>Tatsächlich ist bereits gleichmäßige Beschränktheit auf  $L^\infty$  hinreichend für die Ergebnisse dieses Kapitels, siehe [Ouh05, S. 156].

**Charakterisierung.** Die folgenden Sätze charakterisieren  $L^2$ - $L^\infty$ -Abschätzungen durch Ungleichungen bekannten Typs.

**Satz 3** (Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung). *Für  $d > 0$  sind äquivalent:*

- (i)  $\|e^{-At}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} \quad (\forall t > 0)$
- (ii) für ein/alle  $q \in (2, \infty]$  mit  $d\frac{q-2}{2q} < 1$  gilt

$$\|u\|_q \lesssim \mathfrak{a}(u, u)^{d\frac{q-2}{2q}} \|u\|_2^{1-d\frac{q-2}{2q}} \quad (\forall u \in D(\mathfrak{a}))$$

**Satz 4** (Nash-Ungleichung). *Für  $d > 0$  sind äquivalent:*

- (i)  $\|e^{-At}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} \quad (\forall t > 0)$
- (ii)  $\|u\|_2^{2+\frac{4}{d}} \lesssim \mathfrak{a}(u, u) \|u\|_1^{\frac{4}{d}} \quad (\forall u \in D(\mathfrak{a}) \cap L^1)$

Die vorangehenden Sätze beweisen wir nicht, da wir sie im Weiteren nicht benötigen werden.

**Satz 5** (Sobolev-Ungleichung). *Für  $d > 2$  und mit  $q^* := \frac{qd}{d-q}$  sind äquivalent:*

- (i)  $\|e^{-At}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} \quad (\forall t > 0)$
- (ii)  $A^{-\frac{1}{2}} : L^2 \rightarrow L^{2^*}$  existiert und ist stetig
- (iii)  $\|u\|_{2^*}^2 \lesssim \mathfrak{a}(u, u) \quad (\forall u \in D(\mathfrak{a}))$

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Zunächst liefert Riesz-Thorin-Interpolation zwischen  $L^1$ - $L^\infty$  (!) und  $L^\infty$ - $L^\infty$  Abschätzungen

$$\|e^{-At}\|_{L^q \rightarrow L^\infty} \lesssim_q t^{-\frac{d}{2q}} \quad (\forall t > 0, q \in (1, \infty))$$

Wir werden nun zeigen, dass  $A^{-\frac{1}{2}}$  für alle  $q \in (1, d)$  vom schwachen Typ  $(q, q^*)$  ist. Marcinkiewicz' Interpolationssatz liefert dann die Behauptung (beachte  $d > 2$ ).

Seien also  $q \in (1, d)$  und  $u \in L^2$  fest. Wegen (i) existiert die Inverse und gemäß (1) schreiben wir

$$A^{-\frac{1}{2}}u = \underbrace{\pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^T t^{-\frac{1}{2}} e^{-At} u \, dt}_{=:v} + \underbrace{\pi^{-\frac{1}{2}} \int_T^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-At} u \, dt}_{=:w}$$

mit einer Konstanten  $T > 0$ , die wir erst später festlegen werden. Es gilt nun

$$\|w\|_\infty \lesssim_q \pi^{-\frac{1}{2}} \int_T^\infty t^{-\frac{1}{2}-\frac{d}{2q}} \|u\|_q \, dt \leq: C_q T^{\frac{q-d}{2q}} \|u\|_q$$

( $C_q > 0$  geeignet). Zu festem  $\lambda > 0$  wählen wir jetzt ein  $T > 0$  mit

$$C_q T^{\frac{q-d}{2q}} \|u\|_q = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow T^{\frac{q}{2}} = \left(\frac{\lambda}{2} \frac{1}{C_q} \frac{1}{\|u\|_q}\right)^{-\frac{q^2}{d-q}}$$

Es gilt dann tatsächlich

$$\begin{aligned} \mu(|A^{-\frac{1}{2}}u| \geq \lambda) &\leq \mu(|v| \geq \frac{\lambda}{2}) \leq \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-q} \|v\|_q^q \leq \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-q} \pi^{-\frac{q}{2}} 2^q T^{\frac{q}{2}} \|u\|_q^q \\ &\lesssim_q \lambda^{-q^*} \|u\|_q^{q^*} \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Die Stetigkeit impliziert

$$\|u\|_{2^*}^2 = \|A^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u\|_{2^*}^2 \lesssim \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 = \mathfrak{a}(u, u) \quad (\forall u \in D(\mathfrak{a}))$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Wegen (ii) gilt für alle  $u \in D(\mathfrak{a})$  und  $t > 0$

$$\|e^{-At} u\|_{2^*}^2 \lesssim \mathfrak{a}(e^{-At} u, e^{-At} u) \leq \|e^{-At} u\|_2 \|Ae^{-At} u\|_2 \lesssim t^{-1} \|u\|_2^2,$$

also

$$\|e^{-At}\|_{L^2 \rightarrow L^{2^*}} \lesssim t^{-1/2} \quad (\forall t > 0)$$

Lemma 2 liefert nun die Behauptung.  $\square$

**Verbesserung.** Das folgende Lemma schließlich erlaubt es  $L^2$ - $L^\infty$ -Abschätzungen mittels  $L^2$ - $L^2$ -Abschätzungen zu verbessern.

**Lemma 6.** Für eine Halbgruppe  $T(t)$  auf  $L^2$  und Konstanten  $d > 0$  und  $\omega, \alpha \in \mathbb{R}$  gelte

$$\|T(t)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim e^{-\omega t} \quad (\forall t > 0)$$

$$\|T(t)\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} e^{\alpha t} \quad (\forall t > 0)$$

Dann gilt sogar

$$\|T(t)\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} e^{-\omega t} (1 + \max(\alpha + \omega, 0)t)^{\frac{d}{4}} \quad (\forall t > 0)$$

*Beweis.* Nur der Fall  $\beta := \alpha + \omega > 0$  ist interessant. Wir betrachten die reskalierte Halbgruppe  $S(t) := e^{\omega t} T(t)$ . Nach Voraussetzung existieren Konstanten  $M \geq 1$ ,  $C > 0$  mit

$$\|S(t)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq M$$

$$\|S(t)\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \leq C t^{-\frac{d}{4}} e^{\beta t}$$

Für  $\beta t \leq 1$  gilt natürlich

$$\|S(t)\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \leq C e t^{-\frac{d}{4}}$$

und für  $\beta t > 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} &\leq \|S(\frac{1}{\beta})\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \|S(t - \frac{1}{\beta})\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C e \beta^{\frac{d}{4}} M \\ &\leq M C e t^{-\frac{d}{4}} (\beta t)^{\frac{d}{4}} \end{aligned}$$

Zusammen gilt

$$\|S(t)\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} (1 + \beta t)^{\frac{d}{4}}$$

und das zeigt die Behauptung.  $\square$

### 3. GAUSSABSCHÄTZUNGEN

**Voraussetzungen.** In diesem Abschnitt sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $\mu$  das Lebesgue-Maß und  $H_0^1 \subseteq V = \bar{V} \subseteq H^1$  ein Unterraum. Wie betrachten eine *gleichmäßig elliptische* Form

$$\mathbf{a}_V(u, v) := \int_{\Omega} (\nabla u)^T \mathcal{A}(\bar{\nabla} v) + b^T(\nabla u) \bar{v} + u c^T(\bar{\nabla} v) + a_0 u \bar{v} \, dx$$

auf  $L^2$ , d.h. die Koeffizienten  $\mathcal{A} := (a_{i,j})$ ,  $b := (b_i)$ ,  $c := (c_i)$  und  $a_0$  liegen in  $L^\infty$  und es existiert eine Konstante  $\eta > 0$  so dass gilt

$$\operatorname{Re} \xi^T \mathcal{A} \bar{\xi} \geq \eta |\xi|^2 \quad (\text{a.e., } \forall \xi \in \mathbb{C}^d)$$

Den assoziierten Operator bezeichnen wir mit  $A_V$ .

Wir wollen uns im Folgenden auf den Fall reellwertiger Leitkoeffizienten  $\mathcal{A}$  und Raumdimension  $d \geq 3$  beschränken. Auf die erste Einschränkung lässt sich für hermitesche  $\mathcal{A}$  unter bestimmten Wachstumsbedingungen verzichten. Die zweite ist generell unnötig: Wir treffen sie lediglich, um die folgende Darstellung zu vereinfachen; die Sätze (nicht aber das Lemma), die wir beweisen werden, gelten aber auch im Falle  $d \leq 2$ .

Schließlich wollen wir noch annehmen, dass der Raum der Bedingung

$$u \in V \Rightarrow (1 \wedge |u|) \operatorname{sign}(u) \in V$$

genügt sowie dass eine stetige Einbettung  $V \hookrightarrow L^{2^*}$  existiert.

**Beispiel 7.** Satz 5 angewendet auf die Gaußhalbgruppe aus Beispiel 1 liefert eine Sobolev-Ungleichung auf  $\mathbb{R}^d$ . Da sich jede Funktion in  $H_0^1(\Omega)$  durch 0 zu einer Funktion in  $H^1(\mathbb{R}^d)$  fortsetzen lässt, erhalten wir also immer eine Abschätzung

$$\|u\|_{2^*} \lesssim \|\nabla u\|_2 \quad (\forall u \in H_0^1),$$

Insbesondere existiert immer eine stetige Einbettung  $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ .

Besitzt  $\Omega$  die *Erweiterungseigenschaft*, d.h. existiert eine stetiger Fortsetzungsoperator  $H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)$ , so existiert die gewünschte Einbettung sogar für *beliebiges*  $V$ .

**Erinnerungen.** Unter den Voraussetzungen an Raum und Koeffizienten erfüllt die von  $A_V$  induzierte Halbgruppe für jedes  $p \in [2, \infty)$  die folgende Wachstumsschranke

$$\|e^{-A_V t}\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq e^{\omega_p t} \quad (\forall t > 0),$$

wobei

$$\omega_p := \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \right) \sum_i \|b_i - c_i\|_\infty^2 + \frac{p}{\eta} \sum_i \|\operatorname{Re}(c_i)\|_\infty^2 + \|(\operatorname{Re}(a_0))^- \|_\infty$$

Außerdem erhalten wir mit

$$s(A_V) := \inf\{\operatorname{Re} \mathbf{a}_V(u, u) : u \in V, \|u\|_2 = 1\} \geq -\omega_2$$

immer eine akkretive Form  $\mathbf{a}_V - s(A_V)$  (siehe [Ouh05, Theorem 4.28]).

**$L^2$ - $L^\infty$ -Abschätzungen.** Wir beweisen zunächst in zwei Schritten eine  $L^2$ - $L^\infty$ -Abschätzung, welche wir dann durch Störung in eine Gaußabschätzung verwandeln können.

**Lemma 8.** Für alle  $\epsilon > 0$  haben wir eine Abschätzung

$$\|e^{-A_V t}\|_{L^2 \rightarrow L^{2^*}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}} e^{(\omega_{2^*} + \epsilon)t} \quad (\forall t > 0)$$

Falls  $V = H_0^1(\Omega)$  so ist sogar  $\epsilon = 0$  erlaubt.

*Beweis.* (1) Zunächst erhalten wir aus der Elliptizitätsbedingung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \eta \|\nabla u\|_2^2 &\leq \operatorname{Re} \int_\Omega (\nabla u)^T \mathcal{A}(\overline{\nabla u}) \, dx \\ &= \operatorname{Re}(\mathbf{a}_V(u, u) - \sum_i \int_\Omega b_i(D_i u) \bar{u} + c_i(\overline{D_i u}) u \, dx - \int_\Omega a_0 |u|^2 \, dx) \\ &\leq \operatorname{Re}(\mathbf{a}_V(u, u)) + \sum_i \int_\Omega (|\operatorname{Re}(b_i + c_i)| + |\operatorname{Im}(b_i - c_i)|) |D_i u| |u| \, dx + \|(\operatorname{Re}(a_0))^- \|_\infty \|u\|_2^2 \\ &\leq \operatorname{Re}(\mathbf{a}_V(u, u)) + \underbrace{\frac{\eta}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \left( \frac{1}{2\eta} \sum_i (|\operatorname{Re}(b_i + c_i)| + |\operatorname{Im}(b_i - c_i)|)^2 + \|(\operatorname{Re}(a_0))^- \|_\infty \right)}_{=: \omega} \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

(mit Cauchy-Schwarz und  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ), also

$$\frac{\eta}{2} \|\nabla u\|_2^2 \leq \operatorname{Re}(\mathbf{a}_V(u, u)) + \omega \|u\|_2^2$$

(2) Andererseits liefert die stetige Einbettung  $V \hookrightarrow L^{2^*}$  für jedes feste  $\epsilon > 0$  eine Abschätzung der Form

$$\|u\|_{2^*}^2 \lesssim \epsilon \|u\|_2^2 + \frac{\eta}{2} \|\nabla u\|_2^2 \quad (\forall u \in V)$$

Im Fall  $V = H_0^1(\Omega)$  können wir wegen Beispiel 7 sogar  $\epsilon = 0$  zulassen können. Jetzt rechnet man noch nach, dass  $\omega \leq \omega_{2^*}$  gilt. Dann folgt

$$\|u\|_{2^*}^2 \stackrel{(1)}{\lesssim} (\epsilon + \omega_{2^*}) \|u\|_2^2 + \operatorname{Re}(\mathbf{a}_V(u, u)) \quad (\forall u \in V)$$

(3) Nach der Erinnerung oben definiert  $T(t) := e^{-A_V t} e^{-(\omega_{2^*} + \epsilon)t}$  eine Kontraktionshalbgruppe auf  $L^{2^*}$ . Es folgt

$$\begin{aligned} t \|T(t)u\|_{2^*}^2 &\leq \int_0^t \|T(s)u\|_{2^*}^2 ds \\ &\stackrel{(2)}{\lesssim} \int_0^t (\epsilon + \omega_{2^*}) \|T(s)u\|_2^2 + \operatorname{Re}(\mathbf{a}_V(T(s)u, T(s)u)) ds \\ &= - \int_0^t \frac{d}{ds} \|T(s)u\|_2^2 ds = \|u\|_2^2 - \|T(t)u\|_2^2 \\ &\leq \|u\|_2^2 \quad (\forall t > 0, u \in L^2 \cap L^{2^*}), \end{aligned}$$

d.h.

$$\|T(t)\|_{L^2 \rightarrow L^{2^*}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

**Satz 9** ( $L^2$ - $L^\infty$ -Abschätzung). Für jedes  $\epsilon > 0$  haben wir eine Abschätzung

$$\|e^{-A_V t}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} e^{-s(A_V)t} (1 + (\alpha_1 + c\alpha_2 + \epsilon + s(A_V))t)^{\frac{d}{4}} \quad (\forall t > 0)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \|(\operatorname{Re}(a_0))^- \|_\infty + \frac{1}{\eta} \sum_i \|b_i - c_i\|_\infty^2, \\ \alpha_2 &:= \frac{2}{\eta} \sum_i \|\operatorname{Re}(c_i)\|_\infty^2 \end{aligned}$$

und einer Konstanten  $c \geq 1$ , die nur von  $d$  abhängt. Falls  $V = H_0^1(\Omega)$  so ist sogar  $\epsilon = 0$  erlaubt.

*Beweis.* (1) Für jede Konstante  $c \geq 1$  (wir werden diese später festlegen) gilt

$$\alpha_1 + c\alpha_2 + s(A_V) \geq \alpha_1 + \alpha_2 + s(A_V) = w_2 + s(A_V) \geq 0$$

Deshalb und wegen

$$\|e^{-A_V t}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq e^{-s(A_V)t}$$

und Lemma 6 genügt es, folgende schwächere Abschätzung zu beweisen:

$$\|e^{-A_V t}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{4}} e^{(\alpha_1 + c\alpha_2 + \epsilon)t}$$

(2) Sei  $p \in [2, \infty)$ ; es gilt dann  $2(p-1) \geq p$ . Die Erinnerung und Lemma 8 liefern

$$\begin{aligned} \|e^{-A_V t}\|_{L^2 \rightarrow L^{2^*}} &\leq C_\epsilon t^{-\frac{1}{2}} e^{(\omega_{2^*} + \epsilon)t} \\ \|e^{-A_V t}\|_{L^{2(p-1)} \rightarrow L^{2(p-1)}} &\leq e^{\omega_{2(p-1)}t} \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir Riesz-Thorin-Interpolation an ( $\theta = \frac{1}{p}$ ,  $q = \frac{d}{d-1}p$ ):

$$\|e^{-A_V t}\|_{L^p \rightarrow L^{pd/(d-1)}} \leq C_\epsilon^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{2p}} e^{(\theta\omega_{2^*} + (1-\theta)\omega_{2(p-1)})t} e^{\frac{\epsilon t}{p}}$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\theta\omega_{2^*} + (1-\theta)\omega_{2(p-1)} \leq \alpha_1 + \underbrace{\frac{2(p-1)^2 + \frac{2d}{d-2}}{2p}}_{=:\gamma_p} \alpha_2$$

gilt; so erhalten wir die Abschätzung

$$\|e^{-A_V t}\|_{L^p \rightarrow L^{pd/(d-1)}} \leq C_\epsilon^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{2p}} e^{(\alpha_1 + \gamma_p \alpha_2)t} e^{\frac{\epsilon t}{p}}$$

(3) Mit deren Hilfe können wir uns nun wie Beweis von Lemma 2 schrittweise der gesuchten Norm nähern (nämlich jeweils um den Faktor  $\frac{d}{d-1} > 1$ ): Wir setzen  $t_k := \frac{d+1}{2d} (\frac{2d}{d-1})^{-k}$  und  $p_k := 2(\frac{d}{d-1})^k$ . Dann gelten  $\sum t_k = 1$  und  $\sum \frac{1}{p_k} = \frac{d}{2}$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|e^{-A_V t}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} &\leq \prod_k \|e^{-t t_k A_V}\|_{L^{p_k} \rightarrow L^{p_{k+1}}} \\ &\leq \prod_k C_\epsilon^{\frac{1}{p_k}} t^{-\frac{1}{2p_k}} e^{(\alpha_1 + \gamma_{p_k} \alpha_2)t_k} e^{\frac{\epsilon t t_k}{p_k}} \stackrel{(2)}{\lesssim} t^{-\frac{d}{4}} e^{(\alpha_1 + c\alpha_2 + \epsilon)t} \end{aligned}$$

mit der Konstanten  $c := \max(1, \sum t_k \gamma_{p_k}) \in [1, \infty)$ , die nur von  $d$  abhängt. Schritt (1) liefert nun die Behauptung.  $\square$

**Gaußabschätzungen.** Unter einer zusätzlichen Bedingung an den Definitionsbereich der Form erhalten wir nun das Hauptresultat dieses Abschnitts.

**Satz 10** (Gaußabschätzung). *Erfüllt der Definitionsbereich die Bedingung*

$$u \in V \Rightarrow e^\psi u \in V \quad (\forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \text{ mit } \psi, |\nabla \psi| \text{ beschränkt})$$

so besitzt die Halbgruppe  $(e^{-A_V t})_{t \geq 0}$  einen Wärmeleitungskern  $(p_{V,t})_{t \geq 0}$ . Er genügt für jedes  $\epsilon > 0$  einer Abschätzung

$$|p_{V,t}(x, y)| \lesssim \underbrace{t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4\delta t}\right)}_{\simeq g_{\delta t}(x, y)} e^{(\delta\alpha + \epsilon)t} \quad (\text{a.e., } \forall t > 0)$$

mit

$$\alpha := \|(\operatorname{Re}(a_0))^{-}\|_\infty + \sum_i \|b_i - c_i\|_\infty^2 + \sum_i (\|\operatorname{Re}(b_i)\|_\infty^2 + \|\operatorname{Re}(c_i)\|_\infty^2)$$

und einer weiteren Konstanten  $\delta > 0$ , die nur von  $d$ ,  $\eta$  und  $\|\mathcal{A}\|_\infty$  abhängt. Falls  $V = H_0^1(\Omega)$  so ist sogar  $\epsilon = 0$  erlaubt.

*Beweis.* (1) Zunächst wenden wir Satz 9 auf  $e^{-A_V t}$  und  $e^{-A_V^* t}$  an, und erhalten für festes  $\epsilon$  eine  $L^1$ - $L^\infty$ -Abschätzung

$$\|e^{-A_V t}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \lesssim t^{-\frac{d}{2}} e^{-s(A_V)t} (1 + (c\alpha + \epsilon + \frac{1}{2}s(A_V))t)^{\frac{d}{2}}$$

(beachte: (i) die Konstante  $c$  hier hängt jetzt von  $d$  und  $\eta$  ab; (ii) beim Übergang zur adjungierten Form vertauschen sich die Rollen von  $c_k$  und  $b_k$ , daher die symmetrische Form der Konstanten  $\alpha$ ). Diese Abschätzung liefert sofort die Existenz eines Kerns  $(p_{V,t})$  mit

$$\|p_{V,t}\|_\infty \lesssim t^{-\frac{d}{2}} e^{-s(A_V)t} (1 + (c\alpha + \epsilon + \frac{1}{2}s(A_V))t)^{\frac{d}{2}}$$

(2) Unter Benutzung von  $1 + x \leq e^x$  und nach Abänderung der Konstanten lässt sich diese Abschätzung abschwächen zu

$$\|p_{V,t}\|_\infty \leq Ct^{-\frac{d}{2}} e^{(c\alpha+\epsilon)t}$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass die Konstante  $C$  nur von  $V$ ,  $\eta$  und  $\epsilon$  abhängt.

(3) Wir wenden jetzt ein Störungsargument an. Für festes  $\lambda > 0$  und beschränktem  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  mit  $\|\nabla\phi\|_\infty \leq 1$  betrachten wir die folgende Form auf  $V$ :

$$\mathbf{b}_V(u, v) := \mathbf{a}_V(e^{\lambda\phi}u, e^{-\lambda\phi}v)$$

Sie ist wohldefiniert wegen der zusätzlichen Forderung an  $V$ . Der Hauptteil der Form bleibt dabei gleich; die  $\|c_i\|_\infty$  und  $\|d_i\|_\infty$  ändern sich um  $O(\lambda\|\mathcal{A}\|_\infty)$  und  $\|a_0\|_\infty$  um  $O(\lambda^2\|\mathcal{A}\|_\infty)$ ; damit ändert sich die Konstante  $\alpha$  um  $O(\lambda^2\|\mathcal{A}\|_\infty)$ .

Die von  $\mathbf{b}_V$  induzierte Halbgruppe genügt also wegen (2) einer Abschätzung

$$\|e^{-\lambda\phi}e^{-A_V t}e^{\lambda\phi}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq Ct^{-\frac{d}{2}} e^{(\delta(\alpha+\lambda^2)+\epsilon)t}$$

mit gleichem  $C$  und einer neuen Konstanten  $\delta > 0$ , die nur von  $d$ ,  $\eta$  und  $\|\mathcal{A}\|_\infty$  abhängt. Insbesondere hängen beide Konstanten *nicht* von der Störung ab! Die Abschätzung überträgt sich wie folgt auf den Kern:

$$|p_{V,t}(x, y)| \leq Ct^{-\frac{d}{2}} e^{\lambda(\phi(x)-\phi(y))+\delta\lambda^2 t} e^{(\delta\alpha+\epsilon)t}$$

(4) Speziell für  $\lambda := \frac{\phi(y)-\phi(x)}{2\delta t}$  ergibt sich

$$|p_{V,t}(x, y)| \leq Ct^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{(\phi(x)-\phi(y))^2}{4\delta t}\right) e^{(\delta\alpha+\epsilon)t} \text{ (a.e., } \forall t > 0)$$

(wobei die Nullmenge, auf der die Behauptung nicht gilt, nicht von  $\phi$  abhängt).

Jetzt optimieren wir noch über  $\phi$ . Für jedes  $x, y \in \Omega$  würde die Funktion  $\phi(z) := \min(|x-z|, |x-y|)$  die Behauptung liefern; wir dürfen sie aber offenbar nicht direkt verwenden. Es ist allerdings möglich, sie durch eine Folge  $(\phi_n)$  von  $C_c^\infty$ -Funktionen mit  $\|\nabla\phi_n\|_\infty \leq 1$  zu approximieren (vgl. [Dav87]). Wir erhalten die Gaußabschätzung dann durch Grenzübergang.  $\square$

#### LITERATUR

- [CS08] Thierry Coulhon and Adam Sikora. Gaussian heat kernel upper bounds via Phragmén-Lindelöf theorem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2008.
- [Dav87] Edward Brian Davies. Explicit constants for Gaussian upper bounds on heat kernels. *American Journal of Mathematics*, 1987.
- [KW04] Peer C. Kunstmann and Lutz Weis. *Maximal  $L_p$ -regularity for Parabolic Equations, Fourier Multiplier Theorems and  $H^\infty$ -functional Calculus*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2004.
- [Ouh05] El-Maati Ouhabaz. *Analysis of Heat Equations on Domains*. Princeton University Press, 2005.