

Die Pontryagin-Dualität*

Michael Walter

1 Einführung

1 Erinnerung. Es bezeichnen LCA, CA, DA die Kategorien der lokal-kompakten, kompakten bzw. diskreten abelschen topologischen Gruppen.

Die *duale Gruppe* einer Gruppe $A \in \text{LCA}$ ist gegeben durch

$$A^* := \{\alpha : A \rightarrow \mathbb{T} : \alpha \text{ linear, stetig}\},$$

ihre Elemente heißen *Charaktere*. Wir erhalten damit Funktoren $^*, ** : \text{LCA} \rightarrow \text{LCA}$.

2 Erinnerung. Die Homomorphismen

$$\epsilon_A : A \rightarrow A^{**}, a \mapsto \langle a, \cdot \rangle$$

definieren eine *natürliche Transformation* $\epsilon := \{\epsilon_A\}_{A \in \text{LCA}}$ vom Identitätsfunktors zu $**$. Das heißt, dass für je zwei Objekte $A, B \in \text{LCA}$ und einen Morphismus $f : A \rightarrow B$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\epsilon_A} & A^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\ B & \xrightarrow{\epsilon_B} & B^{**} \end{array}$$

Unser Ziel ist es nun, den folgenden Satz zu beweisen:

*Nach STROPPEL [1], Kapitel 21-22

3 Satz (Pontryagin-Dualität, PD). Für jedes $A \in \text{LCA}$ ist ϵ_A ein Isomorphismus.

Etwas eleganter formuliert ist also ϵ ein natürlicher Isomorphismus.

4 Erinnerung. Aus NATASCHA KASPER'S Vortrag wissen wir schon, dass die ϵ_A monisch sind.

5 Idee. Wir können jede lokal-kompakten Gruppe $A \in \text{LCA}$ als Erweiterung

$$0 \longrightarrow \langle K \rangle \xrightarrow{\alpha} A \twoheadrightarrow A/\langle K \rangle \longrightarrow 0$$

einer diskreten Gruppe über eine kompakt erzeugte Untergruppe $\langle K \rangle$ schreiben.

Letztere lässt sich wiederum als Erweiterung

$$0 \longrightarrow L \hookrightarrow \langle K \rangle \twoheadrightarrow \langle K \rangle / L \longrightarrow 0$$

einer Gruppe vom speziellen Typ CGAL (dazu gleich mehr) über eine kompakte Gruppe L darstellen.

Wir werden sehen, dass sich die Pontryagin-Dualität über diese Erweiterungen "hochheben" lässt; daher wollen wir sie zunächst für Gruppen in CGAL und diskrete Gruppen beweisen, um dann auf kompakte, kompakt erzeugte und schließlich allgemeine lokal-kompakte Gruppen zu schließen.

2 CGAL

6 Definition. Wir betrachten die volle Unterkategorie

$$\text{CGAL} := \{A \in \text{LCA} \mid A \cong \mathbb{R}^a \times \mathbb{T}^b \times \mathbb{Z}^c \times F \text{ für gewisse } a, b, c \in \mathbb{N}_0, F \text{ endlich, diskret, abelsch}\}$$

der *kompakt-erzeugten abelschen Lie-Gruppen* (das ist tatsächlich so).

CGAL besteht also gerade aus Gruppen, die isomorph zu endlichen Produkten der *elementaren Gruppen* $\mathbb{R}, \mathbb{T}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$) sind. Wir berechnen nun explizit deren Duale.

7 Lemma. Die folgenden Abbildungen sind Isomorphismen:

(a) $\eta_{\mathbb{R}^*} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*, r \mapsto (s \mapsto rs + \mathbb{Z})$

Beweis. (1) Wir zeigen zunächst

$$\mathbb{R}^* = \{s \mapsto rs + \mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{R}\}$$

und damit Wohldefiniertheit und Surjektivität von $\eta_{\mathbb{R}^*}$.

Nur die Inklusion \subseteq ist interessant. Betrachte als einen Charakter $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^*$. Es ist $\alpha(\mathbb{R}) \leq \mathbb{T}$ eine nichttriviale zusammenhängende Untergruppe von \mathbb{T} . Das Bild enthält also ein Intervall und damit ganz \mathbb{T} , d.h. α ist surjektiv!

Der Kern von α ist eine abgeschlossene Untergruppe, wegen $\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \in \text{im}(\alpha)$ ist er nichttrivial. Nach Proposition 21.4 existiert dann ein $0 \neq w \in \mathbb{R}$ mit $\ker(\alpha) = \mathbb{Z}w$. Es gilt

$$\alpha\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z} = \alpha\left(\frac{-w}{2}\right)$$

und (nach evtl. Ersetzen von w durch $-w$)

$$\alpha\left(\frac{w}{4}\right) = \frac{1}{4} + \mathbb{Z}$$

Damit gilt

$$\alpha\left(\frac{w}{8}\right) \in \left\{\frac{1}{8} + \mathbb{Z}, \frac{5}{8} + \mathbb{Z}\right\}$$

Nun liegt $\alpha\left(\frac{w}{8}\right) \subseteq \alpha\left(\left(0, \frac{w}{2}\right)\right)$ in der Zusammenhangskomponente von $\mathbb{T} - \left\{\mathbb{Z}, \frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right\}$, die $\frac{1}{4} + \mathbb{Z}$ enthält. Es gilt also

$$\alpha\left(\frac{w}{8}\right) = \frac{1}{8} + \mathbb{Z}$$

Induktiv erhalten wir

$$\alpha\left(\frac{w}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} + \mathbb{Z} = \frac{1}{w} \frac{w}{2^n} + \mathbb{Z} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Somit stimmen α und $s \mapsto \frac{1}{w}s + \mathbb{Z}$ auf einer dichten Untergruppe überein und sind also identisch.

(2) Sicherlich ist $\eta_{\mathbb{R}^*}$ ein Homomorphismus. Wegen

$$\eta_{\mathbb{R}^*}(r) = 0 \Rightarrow rs \in \mathbb{Z} \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow r = 0$$

ist er auch injektiv.

(3) Wir zeigen nun Stetigkeit in 0. Dazu betrachten wir $[C, D_\epsilon]$ mit kompaktem $C \subseteq \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Wähle $K > 0$ mit $C \subseteq [-K, K]$; dann gilt

$$\eta_{\mathbb{R}^*}((-\epsilon/K, \epsilon/K)) \subseteq [C, D_\epsilon]$$

Folglich ist $\eta_{\mathbb{R}^*}$ stetig und nach dem Open Mapping Theorem (6.19) auch offen, also ein Isomorphismus. \square

7 Lemma. ...

(b) $\eta_{\mathbb{T}^*} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}^*, n \mapsto (t \mapsto nt)$

(c) $\eta_{\mathbb{Z}^*} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{Z}^*, t \mapsto (n \mapsto nt)$

(d) $\eta_{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, k+n\mathbb{Z} \mapsto (l+n\mathbb{Z} \mapsto \frac{kl}{n} + \mathbb{Z})$

Beweisidee. (b) Lifte Charaktere von \mathbb{T} nach \mathbb{R} und wende Teil (a) an. Beachte außerdem, dass der Dual einer kompakten Gruppe diskret ist.

(c), (d) Charaktere zyklischer Gruppen sind bereits durch das Bild eines Erzeugers definiert! \square

8 Lemma. Die Pontryagin-Dualität gilt für $\mathbb{R}, \mathbb{T}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Beweis. Wir beweisen dies exemplarisch für \mathbb{R} . Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\eta_{\mathbb{R}^*}} & \mathbb{R}^* & \xrightarrow{(\eta_{\mathbb{R}^*}^*)^{-1}} & \mathbb{R}^{**} \\ & \searrow \epsilon_{\mathbb{R}} & & & \nearrow \end{array}$$

kommutiert, denn es gilt

$$\begin{aligned} & (\eta_{\mathbb{R}^*}^*)^{-1} \circ \eta_{\mathbb{R}^*} = \epsilon_{\mathbb{R}} \\ \Leftrightarrow & \eta_{\mathbb{R}^*} = \eta_{\mathbb{R}^*}^* \circ \epsilon_{\mathbb{R}} \\ \Leftrightarrow & \eta_{\mathbb{R}^*}(r)(s) = (\eta_{\mathbb{R}^*}^* \circ \epsilon_{\mathbb{R}})(r)(s) \\ \Leftrightarrow & \eta_{\mathbb{R}^*}(r)(s) = (\langle r, \cdot \rangle \circ \eta_{\mathbb{R}^*})(s) \\ \Leftrightarrow & rs + \mathbb{Z} = sr + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(jeweils für alle $r, s \in \mathbb{R}$). Wegen Lemma 7 ist damit auch $\epsilon_{\mathbb{R}}$ ein Isomorphismus. \square

9 Theorem. Die Pontryagin-Dualität gilt in CGAL.

Beweis. Jede endliche abelsche Gruppe lässt sich als Produkt endlich vieler zyklischer Gruppen schreiben. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 8 und der Tatsache, dass * mit endlichen Produkten vertauscht. \square

Das folgende Theorem zeigt, dass jede *kompakt erzeugte* lokal-kompakte Gruppe Erweiterung einer kompakt erzeugten Lie-Gruppe über eine Untergruppe ist, welche wir im wesentlichen kontrollieren können.

10 Theorem (LCA und CGAL). Sei $A \in \text{LCA}$ kompakt erzeugt und $U \subseteq A$ eine Umgebung der 0. Dann existiert eine Untergruppe $K \leq A$ mit $K \subseteq U$ und $A/K \in \text{CGAL}$.

Der Beweis hiervon ist recht technisch und benötigt einiges an Vorbereitung; der interessierte Leser sei deshalb an STROPPEL [1] (Theorem 21.16) verwiesen.

3 DA

In diesem Abschnitt sei $A \in \text{DA}$, also eine diskrete abelsche Gruppe.

11 Bemerkung. A ist direkter Limes ihrer endlich erzeugten Untergruppen; diese liegen in CGAL!

Genauer gesagt haben wir auf der gerichteten Menge (I, \subseteq) mit

$$I := \{U \leq A : U \text{ endlich erzeugt}\} \subseteq \text{CGAL}$$

das gerichtete System D , das darauf durch die Inklusionen $i_{U,V} : U \longrightarrow V$ gegeben ist.

Man sieht leicht, dass $A = \varinjlim D$ mit den Inklusionen $i_U : U \longrightarrow A$, d.h. A erfüllt die folgende universelle Eigenschaft

$$\begin{array}{ccc} A = \varinjlim D & & \\ \downarrow \exists_1 \varphi & \swarrow i_U & \dots \\ & U & \xrightarrow{i_{U,V}} \dots \\ & \searrow \varphi_U & \dots \\ & G & \end{array}$$

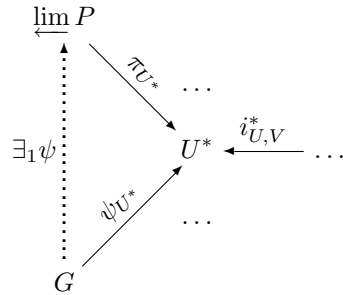
12 Bemerkung. Wir nennen das projektive System P auf den dualen Gruppen

$$J := \{U^* : U \in I\} \subseteq \text{CGAL}$$

gegeben durch die Restriktionen $i_{U,V}^* : V^* \longrightarrow U^*, \alpha \mapsto \alpha|_U$ das zugehörige *duale System*.

Nach JOACHIM BREITNERS Vortrag existiert der projektive Limes $\varprojlim P$ (mit zug. Morphismen $\pi_{U^*} : \varprojlim P \rightarrow U^*$). Des-

sen universelle Eigenschaft ist gegeben durch



Wir können diese nun auf A^* und die $i_U^* : A^* \rightarrow U^*$ anwenden; das liefert einen Morphismus

$$\psi : A^* \longrightarrow \varprojlim P \quad \text{mit} \quad \pi_{U^*} \circ \psi = i_U^*$$

13 Proposition. ψ ist ein Isomorphismus.

Beweis. (1) ψ ist monisch, denn:

$$\begin{aligned}
 0 &= \psi(\alpha) \\
 \Rightarrow 0 &= \pi_{U^*}(\psi(\alpha)) = i_U^*(\alpha) = \alpha|_U
 \end{aligned}$$

(2) ψ ist auch episch: Da A diskret ist gilt für jedes $U \in I$

$$\begin{aligned}
 i_U &: U \xrightarrow{\cong} A \\
 \Rightarrow i_U^* &: A^* \longrightarrow U^* \\
 \Rightarrow \psi &: A^* \longrightarrow \varprojlim P
 \end{aligned}$$

(wobei der letzte Schluss mit einem Satz aus JOACHIM BREITNERS Vortrag folgt; da ging es gerade um proj. Limes von solchen Quotienten!)

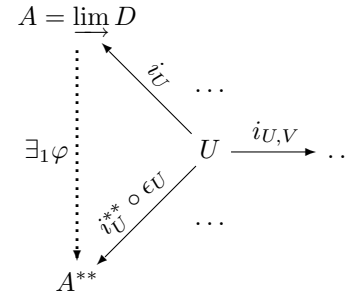
Nun ist A^* kompakt und $\varprojlim P$ Hausdorff'sch, somit ist ψ monische Quotientenabbildung, d.h. Isomorphismus! \square

Also ist A^* mit den i_U^* gerade der projektive Limes des dualen Systems!

Die i_U sind offene Einbettungen, also ist i_U^* Quotientenabbildung und i_U^{**} monisch. Da die Pontryagin-Dualität in CGAL gilt, erhalten wir also monische Abbildungen

$$i_U^{**} \circ \epsilon_U : U \longrightarrow A^{**}$$

Wir nutzen die universelle Eigenschaft des direkten Limes A :



und erhalten einen Morphismus

$$\varphi : A \longrightarrow A^{**} \quad \text{mit} \quad \varphi \circ i_U = i_U^{**} \circ \epsilon_U$$

14 Proposition. φ ist ein Isomorphismus.

Beweis. (1) φ ist injektiv: Denn sei $a \in \ker(\varphi)$. Dann ist $U := \langle a \rangle \in I$ und

$$\begin{aligned}
 0 &= \varphi(a) = \varphi(i_U(a)) = (i_U^{**} \circ \epsilon_U)(a) \\
 \Rightarrow a &= 0
 \end{aligned}$$

denn die rechte Abbildung war ja monisch!

(2) φ ist surjektiv: Um dies einzusehen wählen wir zunächst eine Umgebung W der 0 in \mathbb{T} , welche nur die triviale Untergruppe enthält, sowie ein $\alpha \in A^{**}$.

A ist lokalkompakt, also finden wir eine kompakte Umgebung K der 0 mit

$$K \subseteq \alpha^{-1}(W)$$

und nach JOACHIM BREITNERS Vortrag ("die Kerne der Morphismen des projektiven Limes A^* werden beliebig fein") ein $U \in I$ mit

$$\ker(i_U^*) \subseteq K$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \alpha(\ker(i_U^*)) &\leq \mathbb{T} \quad \text{und} \quad \alpha(\ker(i_U^*)) \subseteq W \\ \Rightarrow \alpha(\ker(i_U^*)) &= 0 \\ \Rightarrow \ker(i_U^*) &\leq \ker(\alpha) \end{aligned}$$

und α faktorisiert über i_U^* , d.h.

$$\begin{array}{ccc} A^* & \xrightarrow{i_U^*} & U^* \\ \alpha \downarrow & \searrow \exists! \beta & \\ \mathbb{T} & & \end{array}$$

für ein $\beta \in U^{**}$. Wegen der Pontryagin-Dualität in CGAL finden wir ein Urbild $u \in U$ unter ϵ_U , d.h.

$$\begin{aligned} \beta &= \epsilon_U(u) \\ \Rightarrow \alpha &= \beta \circ i_U^* = i_U^{**}(\beta) = i_U^{**}(\epsilon_U(u)) = \varphi(i_U(u)) \in \text{im}(\varphi) \end{aligned}$$

Weil A und A^{**} diskret sind ist φ Isomorphismus. □

15 Theorem. Die Pontryagin-Dualität gilt in DA.

Beweis. Wir zeigen, dass ϵ_A und φ die gleichen Abbildungen sind!

Sei $a \in A$. Dann ist $U := \langle a \rangle \in I$ und wir erhalten

$$\varphi(a) = \varphi(i_U(a)) = i_U^{**}(\epsilon_U(a)) = \epsilon_U(a) \circ i_U^*$$

Für jedes $\alpha \in A^*$ gilt dann

$$\begin{aligned} \varphi(a)(\alpha) &= \epsilon_U(a)(i_U^*(\alpha)) = \epsilon_U(a)(\alpha|_U) \\ &= \alpha|_U(a) = \alpha(a) = \epsilon_A(a)(\alpha) \\ \Rightarrow \varphi &= \epsilon_A \end{aligned}$$

4 LCA

16 Lemma. Für $A \in \text{LCA}$ gilt:

$$\epsilon_A^* \circ \epsilon_{A^*} = \text{id}_{A^*}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (\epsilon_A^* \circ \epsilon_{A^*})(\alpha)(a) &= (\epsilon_{A^*}(\alpha) \circ \epsilon_A)(a) = \epsilon_{A^*}(\alpha)(\langle a, \cdot \rangle) \\ &= \langle \alpha, \cdot \rangle(\langle a, \cdot \rangle) = \langle a, \alpha \rangle = \alpha(a) \end{aligned}$$

□

17 Proposition. Die Pontryagin-Dualität gilt in CA.

Beweis. Sei A kompakt, also A^* diskret und nach Satz 15 ist ϵ_{A^*} Isomorphismus. Das Lemma zeigt dann, dass auch ϵ_A^* Isomorphismus ist.

Somit ist ϵ_A monisch und episch von einem Kompaktum in einen Hausdorffraum, also monische Quotientenabbildung, also Isomorphismus. □

18 Proposition. Die Pontryagin-Dualität gilt für kompakt erzeugte Gruppen in LCA. □

Beweis. Sei $A \in \text{LCA}$ und K eine kompakte Umgebung der 0. Nach Satz 10 existiert eine Untergruppe $L \leq A$ mit

$$L \subseteq K \quad \text{und} \quad A/L \in \text{CGAL}$$

A/L ist insbesondere Hausdorff'sch, also ist L als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums wieder kompakt.

Damit ist A Erweiterung einer Gruppe aus CGAL über ein Kompaktum

$$\square \quad 0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} A/L \longrightarrow 0$$

(wie zu Beginn angekündigt) und wir erhalten folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{q} & A/L \\
 \cong \downarrow \epsilon_L & & \downarrow \epsilon_A & & \downarrow \epsilon_{A/L} \cong \\
 L^{**} & \xrightarrow{i^{**}} & A^{**} & \xrightarrow{q^{**}} & (A/L)^{**}
 \end{array}$$

Wir wollen nun die letzte Bemerkung in NATASCHA KAS-PERS Vortrag anwenden. Wir bemerken dazu, dass

$$\begin{aligned}
 q : A &\longrightarrow A/L \\
 \Rightarrow q^* : (A/L)^* &\hookrightarrow A^*
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i^{**} &= \epsilon_A \circ i \circ \epsilon_L^{-1} : L^{**} \longrightarrow A^{**} \\
 \Rightarrow i^* : A^* &\longrightarrow L^*
 \end{aligned}$$

L^* ist diskret, damit ist i^* sogar surjektiv und offen, d.h. eine Quotientenabbildung. Wir haben also folgende exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow L^* \xleftarrow{i^*} A^* \xleftarrow{q^*} (A/L)^* \longleftarrow 0$$

und besagte Bemerkung liefert die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow L^{**} \xrightarrow{i^{**}} A^{**} \xrightarrow{q^{**}} (A/L)^{**}$$

Aus dem kommutativen Diagramm oben erkennt man noch:

$$\begin{aligned}
 q^{**}(\epsilon_A(A)) &= \epsilon_{A/L}(q(A)) = (A/L)^{**} \\
 \Rightarrow A^{**} &= q^{**^{-1}}(q^{**}(\epsilon_A(A))) = \epsilon_A(A) + \ker(q^{**}) \\
 &= \epsilon_A(A) + \text{im}(i^{**}) = \epsilon_A(A) + i^{**}(\epsilon_L(L)) \\
 &= \epsilon_A(A) + \epsilon_A(i(L)) = \epsilon_A(A)
 \end{aligned}$$

Also ist ϵ_A surjektiv.

Als kompakt erzeugte Gruppe ist A insbesondere σ -kompakt, und das Open Mapping Theorem liefert die Offenheit der surjektiven, stetigen Abbildung ϵ_A . Als monische Abbildung ist sie somit sogar Isomorphismus. \square

19 Theorem. Die Pontryagin-Dualität gilt in LCA.

Beweis. Sei $A \in \text{LCA}$. Wähle eine kompakte Umgebung K der 0. Dann ist $\langle K \rangle$ kompakt erzeugt und offen, somit $A/\langle K \rangle$ diskret und wir haben die Erweiterung

$$0 \longrightarrow \langle K \rangle \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} A/\langle K \rangle \longrightarrow 0$$

Wir wenden zweimal die Bemerkung aus NATASCHA KAS-PERS Vortrag an und erhalten die exakten Sequenzen

$$\begin{aligned}
 0 &\longleftarrow \langle K \rangle^* \xleftarrow{i^*} A^* \xleftarrow{q^*} (A/\langle K \rangle)^* \longleftarrow 0 \\
 0 &\longrightarrow \langle K \rangle^{**} \xrightarrow{i^{**}} A^{**} \xrightarrow{q^{**}} (A/\langle K \rangle)^{**}
 \end{aligned}$$

Genauso wie im Beweis des vorhergehenden Satzes finden wir, dass ϵ_A surjektiv ist.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass ϵ_A offen ist. Die $\{0\}$ ist offen in der diskreten Gruppe $(A/\langle K \rangle)^{**}$, damit auch $\ker(q^{**}) = \text{im}(i^{**})$. Folglich ist i^{**} offen (als Einbettung; denn der Schnitt zweier offener Mengen ist wieder offen).

Nun ist aber $i^{**} \circ \epsilon_{\langle K \rangle} = \epsilon_A \circ i$ offen, d.h. auch $\epsilon_A|_{\langle K \rangle}$. Da wir jedes Element in die offene Menge $\langle K \rangle$ verschieben können folgt damit die Offenheit von ϵ_A . \square

Literatur

[1] M. Stroppel. *Locally Compact Groups*. EMS, 2006.