

Der Satz von Ado*

Michael Walter

Es bezeichnet $+$ (bzw. \oplus) stets die (direkte) Summe im Vektorraumsinne, und 0 den trivialen Vektorraum/Modul/Algebra (wo passend). Weiterhin bezeichne $\langle \dots \rangle$ das Vektorraum- und (\dots) das Idealerzeugnis, und assoziative Algebren mit Eins nennen wir einfach Algebren.

1 Theorem (Ado). *Jede endlichdim. Lie-Algebra hat eine treue endlichdim. Darstellung.*

2 Proposition. *Sei \mathfrak{n} eine nilpotente endlichdim. Lie-Algebra mit $C^k(\mathfrak{n}) = 0$, kanonischer Einbettung $\sigma : \mathfrak{n} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{n})$ sowie*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j := \left(\sum_{i \geq j} \sigma(\mathfrak{n})^i \right) \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

Dann sind die $\mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j$ endlichdim. Algebren, und der kanonische Homomorphismus

$$\sigma_k : \mathfrak{n} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k$$

ist injektiv.

Beweis. (1) Aus dem Satz von PBW folgt direkt, dass die $\mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j$ endlichdimensional sind (denn es fehlen höchstens die Basismonome mit weniger als j Faktoren).

(2) Es verbleibt zu zeigen, dass

$$\ker(\sigma_k) = \sigma(\mathfrak{n}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{n})_k \stackrel{!}{=} 0$$

Dazu setzen wir $d_j := \dim C^j(\mathfrak{n})$ und wählen eine Basis $\{e_i\}$ von \mathfrak{n} mit

$$\langle e_1, \dots, e_{d_j} \rangle = C^j(\mathfrak{n}) \quad (j = 0, \dots, k-1)$$

(klar: wähle Basis von C^{k-1} , erweitere zu Basis von C^{k-2} , usw.).

Wir weisen nun jedem Element in \mathfrak{n} sowie allen Monomen $e_{i_1} \cdots e_{i_s}$ ein *Gewicht* zu

$$w(x) := h \quad \text{für } 0 \neq x \in C^h(\mathfrak{n}) \setminus C^{h+1}(\mathfrak{n})$$

$$w(0) := \infty$$

$$w(e_{i_1} \cdots e_{i_s}) := \sum_{j=1}^s w(e_{i_j})$$

Nach Übungsaufgabe 4.2.7 gilt $[C^a(\mathfrak{n}), C^b(\mathfrak{n})] \subseteq C^{a+b}(\mathfrak{n})$, und es folgt

$$w([x, y]) \geq w(x) + w(y) \quad \forall x, y \in \mathfrak{n} \quad (*)$$

Ferner gilt nach Wahl der Basis:

$$\sum_j c_j e_j \in C^a(\mathfrak{n}) \quad \Rightarrow \quad \forall j : c_j e_j \in C^a(\mathfrak{n}) \quad (**)$$

Sei nun $e_{i_1} \cdots e_{i_s} \in \mathcal{U}(\mathfrak{n})$ ein beliebiges Monom. Mittels

$$e_a e_b = e_b e_a + [e_a, e_b]$$

*Nach [1], Kapitel 6.4

können wir es als LK von PBW-Basismonomen $e_1^{m_1} \dots e_j^{m_j}$ schreiben. Wegen $[e_a, e_b]$ entstehen dabei zwar Monome kleineren Grades (und das Verfahren terminiert), wegen (*) und (**) ist das Gewicht jedes entstehenden Monoms allerdings nicht geringer.

Die Elemente von $\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k$ sind LK von Produkten mit mindestens k Faktoren, können als LK von PBW-Basismonomen vom Gewicht $\geq k$ geschrieben werden. Die Elemente von $\sigma(\mathfrak{n})$ allerdings sind LK von PBW-Basismonomen mit Gewicht $\leq k - 1$. Es liegt also nur die triviale LK 0 im Schnitt. \square

Bemerkung. Damit gilt der Satz von Ado für nilpotente Lie-Algebren, denn für jede endlichdim. Algebra \mathcal{A} definiert die Linksmultiplikation

$$\begin{aligned} L : \mathcal{A} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{A}), \quad x \mapsto L_x \\ L_x : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}, \quad y \mapsto xy \end{aligned}$$

eine treue endlichdim. Darstellung ($L_x = 0 \Rightarrow x = x1 = 0$).

3 Lemma. Sei \mathfrak{g} eine endlichdim. Lie-Algebra, $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})_L$ der kanonische Homomorphismus und $D \in \text{der}(\mathfrak{g})$. Dann existiert genau ein $\tilde{D} \in \text{der}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ mit

$$\sigma \circ D = \tilde{D} \circ \sigma$$

Beweis. Wir identifizieren \mathfrak{g} und $\sigma(\mathfrak{g})$.

(1) Eindeutigkeit: $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ wird (als Algebra) von \mathfrak{g} und der Eins erzeugt. Für jede Derivation gilt aber $\tilde{D}(1) = 0$, und die geforderte Relation legt \tilde{D} auf \mathfrak{g} fest.

(2) Existenz: Wir betrachten die Algebra $\mathcal{A} := M_2(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$. Dann ist

$$\phi : \begin{cases} \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{A}_L \\ x \mapsto \begin{pmatrix} x & D(x) \\ 0 & x \end{pmatrix} \end{cases}$$

ein Lie-Algebren-Homomorphismus; die universellen Eigenschaft von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ liefert einen Algebren-Homomorphismus $\tilde{\phi} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}$ mit $\tilde{\phi} \circ \sigma = \phi$.

Da $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ von \mathfrak{g} und der Eins erzeugt wird und $\tilde{\phi}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gelten muss, ist auch $\tilde{\phi}$ von der Form

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{pmatrix} x & \tilde{D}(x) \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

wobei \tilde{D} eine Derivation ist; letzteres folgt aus den Homomorphismus-Eigenschaften von $\tilde{\phi}$, insbesondere $\tilde{\phi}(xy) = \tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)$. Nach Konstruktion gilt $\tilde{D} \circ \sigma = D$. \square

Bemerkung. Aus den Homomorphismuseigenschaften von σ und der Eindeutigkeit von \tilde{D} folgt sogar, dass die Abbildung $D \mapsto \tilde{D}$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist.

4 Proposition. Seien $\mathfrak{n}, \mathfrak{l}$ endlichdim. Lie-Algebren, \mathfrak{n} nilpotent und

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{n} \rtimes_{\gamma} \mathfrak{l}$$

Dann hat \mathfrak{g} eine endlichdim. Darstellung, die treu auf \mathfrak{n} ist.

Beweis. Es gelte $C^k(\mathfrak{n}) = 0$. Dann liefert Proposition 2 den injektiven Homomorphismus

$$\sigma_k : \mathfrak{n} \rightarrow \underbrace{\mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k}_{=: \mathcal{A}}$$

und damit die treue Darstellung $L \circ \sigma_k : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.

Weiterhin induziert γ nach der Bemerkung zu Lemma 3 eine Darstellung

$$\tilde{\gamma} : \mathfrak{l} \rightarrow \text{der}(\mathcal{U}(\mathfrak{n}))$$

Für die Derivationen $\tilde{\gamma}(x)$ gilt ja insbesondere $\tilde{\gamma}(x)(\mathfrak{n}) \subseteq \mathfrak{n}$, folglich

$$\tilde{\gamma}(x)(\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k) \subseteq \mathcal{U}(\mathfrak{n})_k$$

und wir erhalten eine induzierte Darstellung $\bar{\gamma} : \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.
Man kann nun nachrechnen, dass

$$\pi : \mathfrak{n} \rtimes_{\gamma} \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{A}), (n, x) \mapsto L_{\sigma_k(n)} + \bar{\gamma}(x)$$

eine Darstellung ist. Sie ist von der gewünschten Form. \square

5 Lemma. Sei $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{g}$ nilpotentes Ideal der endlichdim. Lie-Algebra \mathfrak{g} und $x \in \mathfrak{g}$. Gibt es ein $n \in \mathfrak{n}$ so dass $\text{ad}(x+n)$ nilpotent ist, so ist auch $\text{ad}(x)$ nilpotent.

Beweis. Sei $\mathcal{F} = (g_0, \dots, g_k)$ eine maximale Fahne von Idealen in \mathfrak{g} , d.h. die Quotienten

$$\mathfrak{q}_j := \mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j \quad (j = 0, \dots, k-1)$$

sind einfache \mathfrak{g} -Moduln (via ad) und damit auch einfache \mathfrak{n} -Moduln.

Da \mathfrak{g} und damit die \mathfrak{q}_j aber auch nilpotente \mathfrak{n} -Moduln sind, muss \mathfrak{n} trivial auf den \mathfrak{q}_j operieren. Folglich:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{n}, \mathfrak{g}_{j+1}] &\subseteq \mathfrak{g}_j \\ \Rightarrow \text{ad}(\mathfrak{n})(\mathfrak{g}_{j+1}) &\subseteq \mathfrak{g}_j \\ \Rightarrow \text{ad}_{\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j}(\mathfrak{n}) &= 0 \\ \Rightarrow \text{ad}_{\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j}(x) &= \text{ad}_{\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j}(x+n) \end{aligned}$$

Es sind also alle $\text{ad}_{\mathfrak{g}_{j+1}/\mathfrak{g}_j}(x)$ nilpotent, was äquivalent zur Nilpotenz von $\text{ad}(x)$ ist. \square

6 Lemma. Sei \mathfrak{r} eine auflösbare endlichdim. Lie-Algebra mit endlichdim. Darstellung (ρ, V) . Dann gilt:

$$\mathfrak{n}_\rho := \{x \in \mathfrak{r} \mid \rho(x) \text{ nilpotent}\} \trianglelefteq \mathfrak{r}$$

Beweis. O.E. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (sonst komplexifizieren). Nach dem Satz von Lie existiert eine vollständige Fahne $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_k)$ in V mit $\rho(\mathfrak{r}) \subseteq \mathfrak{g}(\mathcal{F})$.

Bekanntlich gilt $\mathfrak{g}_n(\mathcal{F}) \trianglelefteq \mathfrak{g}(\mathcal{F})$ und damit ist auch

$$\rho^{-1}(\mathfrak{g}_n(\mathcal{F})) = \{x \in \mathfrak{r} \mid \forall j : \rho(x)(V_{j+1}) \subseteq V_j\} = \mathfrak{n}_\rho$$

(beachte $\dim V_j = j$; Induktion) ein Ideal. \square

7 Bemerkung. Angewendet auf die ad -Darstellung des auflösbaren Radikals einer endlichdim. Lie-Algebra \mathfrak{g} erhalten wir, dass

$$\mathfrak{n}_{\text{ad}} := \{x \in \text{rad}(\mathfrak{g}) \mid \text{ad}(x) \text{ nilpotent}\}$$

ein nilpotentes Ideal von $\text{rad}(\mathfrak{g})$ (Satz von Engel) bzw. sogar von \mathfrak{g} ist (Korollar 4.4.15). Tatsächlich ist es das *maximal nilpotente Ideal* von \mathfrak{g} , denn jedes nilpotente Ideal ist im Radikal und damit auch in \mathfrak{n}_{ad} enthalten (Satz von Engel).

Beweis. [Beweis von Satz 1] Idee: Wir betten \mathfrak{g} in eine semidirekte Summe eines nilpotenten Ideals und einer reduktiven Lie-Algebra ein, und wenden dann Proposition 4 an.

Im Folgenden identifizieren wir isomorphe Objekte.

(1) Nach 4.6.8 existiert eine Levi-Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\text{rad}(\mathfrak{g})}_{=: \mathfrak{r}} \rtimes \mathfrak{s}$$

mit halbeinfachem $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{g}$. Nach dem Satz von Weyl (4.5.22) ist $\mathfrak{r} \trianglelefteq \mathfrak{g}$ halbeinfacher \mathfrak{s} -Modul, und Proposition 4.5.18 liefert die Zerlegung

$$\mathfrak{r} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \oplus \mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s})$$

(2) Sei nun \mathfrak{h} eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s})$. Lemma 5.1.18 (i) zeigt, dass

$$\mathfrak{d} := (\text{ad}(\mathfrak{h}))_{\mathfrak{s}} \leq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

eine abelsche Unteralgebra von Derivationen ist. Wir setzen

$$\hat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \rtimes_{\text{id}} \mathfrak{d}$$

und zeigen im Folgenden, dass sich $\hat{\mathfrak{g}}$ als semidirektes Produkt von der gewünschten Form schreiben lässt.

(3) Nach Wahl von \mathfrak{h} annihilieren die \mathfrak{d} ja \mathfrak{s} , außerdem gilt $[\mathfrak{d}, \mathfrak{d}] = 0$, und damit ist die (innere) direkte Summe

$$\mathfrak{l} := \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{d} \leq \hat{\mathfrak{g}}$$

reduktiv nach Proposition 4.7.3 (ii). Ihr Zentrum ist \mathfrak{d} .

(4) Es gilt auch

$$\hat{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}) \rtimes \mathfrak{d} = \underbrace{(\mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{d})}_{=: \hat{\mathfrak{r}}} \rtimes \mathfrak{s},$$

denn (beachte Übungsaufgabe 4.1.6): Einerseits gilt natürlich $\mathfrak{r} \oplus \mathfrak{d} = \hat{\mathfrak{r}}$, und wegen 4.3.7 (iii) auch $[\mathfrak{d}, \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{r}$, also $\mathfrak{r} \trianglelefteq \hat{\mathfrak{r}}$.

Außerdem ist sicherlich $\hat{\mathfrak{r}} \oplus \mathfrak{s} = \hat{\mathfrak{g}}$. Wegen XXX findet man sogar, dass $\hat{\mathfrak{r}} = \text{rad}(\hat{\mathfrak{g}}) \trianglelefteq \hat{\mathfrak{g}}$.

(5) Nach Proposition 5.1.11 (ii) bildet der kanonische Homomorphismus $\mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s}) \rightarrow \mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s}) / [\mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s})]$ schon \mathfrak{h} surjektiv ab (das Bild ist ja seine eigene CUA). Folglich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s}) &= [\mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{s})] + \mathfrak{h} \\ &\subseteq [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] + \mathfrak{h} \\ \Rightarrow \mathfrak{r} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] + \mathfrak{h} \end{aligned}$$

(6) Wir können also jedes $x \in \mathfrak{r}$ schreiben als

$$x = n + h \quad (n \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}], h \in \mathfrak{h})$$

Setze $d := (\text{ad}(h))_s \in \mathfrak{d}$. Damit liegt $x - d \in \hat{\mathfrak{r}}$.

Nach Korollar 4.4.15 ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \trianglelefteq \hat{\mathfrak{g}}$ nilpotentes Ideal. Außerdem stimmen $\text{ad}(h-d)$ und $\text{ad}(h)-d = \text{ad}(h)_n$ auf \mathfrak{g} überein

($\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \rtimes_{\text{id}} \mathfrak{d}$), d.h. $\text{ad}(h-d)$ ist nilpotent auf \mathfrak{g} , damit insbesondere auf $[\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{g}}]$ und somit auch auf ganz $\hat{\mathfrak{g}}$. Mit Lemma 5 und Bemerkung 7 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{ad}(x-d) \in \hat{\mathfrak{n}} &:= \{x \in \hat{\mathfrak{r}} \mid \text{ad}(x) \text{ nilpotent}\} \trianglelefteq \hat{\mathfrak{g}} \\ \Rightarrow \hat{\mathfrak{r}} &\subseteq \hat{\mathfrak{n}} + \mathfrak{d} \\ \Rightarrow \hat{\mathfrak{g}} &= \hat{\mathfrak{n}} + \mathfrak{d} + \mathfrak{s} \end{aligned}$$

Die Elemente aus $\hat{\mathfrak{n}}$ operieren nilpotent auf \mathfrak{g} , die aus \mathfrak{d} aber halbeinfach. Es gilt also $\hat{\mathfrak{n}} \cap \mathfrak{d} = 0$, und mit (4) sogar $\hat{\mathfrak{n}} \cap (\mathfrak{d} + \mathfrak{s}) = 0$. Folglich:

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}} \rtimes \mathfrak{l}$$

Also ist $\hat{\mathfrak{g}}$ semidirekte Summe eines nilpotenten Ideals und einer reduktiven Lie-Algebra, welche \mathfrak{g} enthält!

(7) Proposition 4 liefert nun eine endlichdim. Darstellung

$$\hat{\pi} : \hat{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(V),$$

die treu auf $\hat{\mathfrak{n}} \supseteq \mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}}) \supseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ist (zentrale Elemente operieren nilpotent).

Damit ist auch $\pi := \hat{\pi}|_{\mathfrak{g}}$ injektiv auf $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, und

$$\pi \oplus \text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto (\pi(x), \text{ad}(x))$$

ist eine treue endlichdimensionale Darstellung von \mathfrak{g} . \square

Literatur

[1] J. Hilgert and K.-H. Neeb. *Manuskript für eine Neuauflage von Lie-Gruppen und Lie-Algebren*. 2008.