Der Satz von Ado

Michael Walter

Ziel des Vortrags war es, den folgenden Satz zu beweisen:

1 Theorem (Ado). *Jede endlichdim. Lie-Algebra hat eine treue endlichdim. Darstellung.*

Insbesondere kann man also jede endlichdim. Lie-Algebra als Unteralgebra einer $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ auffassen, d.h. als Matrizen-Lie-Algebra.

Zunächst wurde die folgende Proposition gezeigt:

2 Proposition. *Sei $\mathfrak{n}$ eine nilpotente endlichdim. Lie-Algebra mit $C^k(\mathfrak{n}) = 0$, kanonischer Einbettung $\sigma : \mathfrak{n} \to \mathcal{U}(\mathfrak{n})$ sowie*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j := (\sum_{i \geq j} \sigma(\mathfrak{n})^i) \qquad (j \in \mathbb{N}_0)$$

Dann sind die $\mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j$ endlichdim. *Algebren, und der kanonische Homomorphismus*

$$\sigma_k : \mathfrak{n} \to \mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k$$

ist injektiv.

Beweis. (1) Aus dem Satz von PBW folgt direkt, dass die $\mathcal{U}(\mathfrak{n})/\mathcal{U}(\mathfrak{n})_j$ endlichdimensional sind (denn es fehlen höchstens die Basismonome mit weniger als j Faktoren).

(2) Es verbleibt zu zeigen, dass

$$\ker(\sigma_k) = \sigma(\mathfrak{n}) \cap \mathcal{U}(\mathfrak{n})_k \stackrel{!}{=} 0$$

Dazu setzen wir $d_j := \dim C^j(\mathfrak{n})$ und wählen eine Basis $\{e_i\}$ von $\mathfrak{n}$ mit

$$\langle e_1, \ldots, e_{d_j} \rangle = C^j(\mathfrak{n}) \qquad (j = 0, \ldots, k-1)$$

(klar: wähle Basis von C^{k-1}, erweitere zu Basis von C^{k-2}, usw.).

Wir weisen nun jedem Element in $\mathfrak{n}$ sowie allen Monomen $e_{i_1} \cdots e_{i_s}$ ein *Gewicht* zu

$$\begin{aligned} w(x) &:= h \quad \text{für} \quad 0 \neq x \in C^h(\mathfrak{n}) \setminus C^{h+1}(\mathfrak{n}) \\ w(0) &:= \infty \\ w(e_{i_1} \cdots e_{i_s}) &:= \sum_{j=1}^{s} w(e_{i_j}) \end{aligned}$$

Nach Übungsaufgabe 4.2.7 gilt $[C^a(\mathfrak{n}), C^b(\mathfrak{n})] \subseteq C^{a+b}(\mathfrak{n})$, und es folgt

$$w([x,y]) \geq w(x) + w(y) \quad \forall x, y, \in \mathfrak{n} \qquad (*)$$

Ferner gilt nach Wahl der Basis:

$$\sum_j c_j e_j \in C^a(\mathfrak{n}) \quad \Rightarrow \quad \forall j: \; c_j e_j \in C^a(\mathfrak{n}) \qquad (**)$$

Sei nun $e_{i_1} \cdots e_{i_s} \in \mathcal{U}(\mathfrak{n})$ ein beliebiges Monom. Mittels

$$e_a e_b = e_b e_a + [e_a, e_b]$$

können wir es als LK von PBW-Basismonomen $e_1^{m_1} \cdots e_j^{m_j}$ schreiben. Wegen $[e_a, e_b]$ entstehen dabei zwar Monome kleineren Grades (und das Verfahren terminiert), wegen (*) und (**) ist das Gewicht jedes entstehenden Monoms allerdings nicht geringer.

Die Elemente von $\mathcal{U}(\mathfrak{n})_k$ sind LK von Produkten mit mindestens k Faktoren, können als LK von PBW-Basismonomen vom Gewicht $\geq k$ geschrieben werden. Die Elemente von $\sigma(\mathfrak{n})$ allerdings sind LK von PBW-Basismonomen mit Gewicht $\leq k-1$. Es liegt also nur die triviale LK 0 im Schnitt. □

Damit gilt der Satz von Ado für nilpotente Lie-Algebren, denn für jede endlichdim. Algebra $\mathcal{A}$ definiert die Linksmultiplikation

$$\begin{aligned} L &: \mathcal{A} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{A}), \; x \mapsto L_x \\ L_x &: \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \; y \mapsto xy \end{aligned}$$

eine treue endlichdim. Darstellung ($L_x = 0 \Rightarrow x = x1 = 0$).

Man erhält nun leicht die folgende Aussage:

3 Proposition. *Seien $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{l}$ endlichdim. Lie-Algebren, $\mathfrak{n}$ nilpotent und*

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{n} \rtimes_\gamma \mathfrak{l}$$

Dann hat $\mathfrak{g}$ eine endlichdim. Darstellung, die treu auf $\mathfrak{n}$ ist.

Der allgemeine Fall wird dann bewiesen, indem man die gegeben Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ (in einer recht technischen Konstruktion) in eine solche semidirekte Summe einbettet.

Dabei sorgt man dafür, dass das Zentrum von $\mathfrak{g}$ in diesem nilpotenten Ideal liegen, so dass Proposition 3 eine Darstellung liefert, die treu auf dem Zentrum ist. Diese wird dann mit ad kombiniert, um eine treue Darstellung auf ganz $\mathfrak{g}$ zu erhalten.