

# Darstellungen kompakter Gruppen – Teil 2\*

Michael Walter

Gegeben sei eine Darstellung  $\sigma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  einer kompakten Gruppe  $G$  auf einem vollständigen, lokal-konvexen topologischen Vektorraum  $V$ .

## 1 Überblick

Wir definieren den  $\pi$ -isotypischen Unterraum  $V_\pi$  als die Summe aller zu  $[\pi] \in \hat{G}$  äquivalenten Unterdarstellungen von  $V$ :

$$V_\pi := \sum \{U \leq V : U \text{ } \sigma(G)\text{-invariant, } [\sigma(\cdot)|_U] = [\pi]\}$$

Die Menge der  $\{V_\pi\}$  nennen wir die  $G$ -Typen für  $\sigma$ .

Desweiteren heißt ein Vektor  $v \in V$   $\sigma(G)$ -endlich, falls er in einer endlichdim. Unterdarstellung enthalten ist, also wenn  $\dim \text{span } \sigma(G)(v) < \infty$ . Die Menge aller solcher Vektoren bezeichnen wir mit  $V^{\text{fin}}$ .

Da endlichdim. Darstellungen vollständig reduzibel sind, gilt  $V^{\text{fin}} = \sum_{[\pi]} V_\pi$ . In Abschnitt 2 werden wir zeigen: Diese Summe ist direkt (und im unitären Falle sogar orthogonal).

Erinnern wir uns ferner an die **Matrizenkoeffizienten** einer Darstellung  $[\pi] \in \hat{G}$ , wie sie im vorigen Vortrag untersucht wurden:

$$\begin{aligned} M_\pi &:= \{\text{tr}(\sigma(\cdot) \circ A) : A \in \text{End}(V)\} \\ &= \{\lambda \circ \pi : \lambda \in \text{End}(V)^*\} \end{aligned}$$

In Abschnitt 3 werden wir feststellen, dass diese gerade die  $\pi$ -isotypischen Unterräume der **rechtsregulären Darstellung**

$$R^* : G \rightarrow \text{GL}(C(G)), g \mapsto f \mapsto x \mapsto f(xg)$$

sind.

In Abschnitt 4 zitieren wir, dass die Matrizenfunktionen dicht in  $C(G)$  liegen – das ist der **Satz von Peter-Weyl**. Zusammen mit dem Vorhergehenden ergeben sich (1) die Endlichdimensionalität aller irreduziblen Darstellungen, (2) die **abstrakte Fourierzerlegung**

$$L^2(G) = \text{HR-} \bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}}^\perp M_\pi,$$

(3) die Charakterisierung von  $G$  als projektiver Limes ihrer Bilder unter den endlichdim. Darstellungen

$$G = \varprojlim_{[\pi] \in \hat{G}} G / \ker \pi$$

und damit (4) eine Charakterisierung der kompakten Lie-Gruppen als diejenige kompakte Gruppen, die

\*basierend auf [DK00], Kapitel 4.4–4.7

nicht beliebig kleine abgeschlossene Untergruppen enthalten.

Zuletzt beschreiben wir in Abschnitt 5 eine Konstruktion, die mit dem bis dahin Untersuchten eher weniger zu tun hat: Wir erhalten (funktoriell) für jede Darstellung  $\tau : H \rightarrow \text{GL}(U)$  einer abgeschlossenen Untergruppe  $H \leq G$  eine **induzierte Darstellung**  $\text{Ind}_H^G \tau$  auf ganz  $G$ , und zwar in solch einer Weise, dass der Funktor  $\text{Ind}_H^G$  rechtsadjungiert ist zur Restriktion. Dieses Ergebnis ist als **Frobenius-Reziprozität** bekannt.

## 2 $G$ -Typen

**1 Lemma.** (i) Für  $\sigma$  unitär,  $f \in C(G)$  gilt  $\sigma(f)^* = \sigma(f^*)$  mit  $f^* := \bar{f}$ .

(ii) Ist  $f \in C(G)$  konjugationsinvariant und  $[\pi] \in \hat{G}$ , so gilt  $\sigma(f)|_{V_\pi} = \langle f, \chi_\pi \rangle \text{id}$ .

*Beweis.* Siehe [DK00, Lemmata 4.4.1 (iii) und 4.4.3].  $\square$

**2 Satz** (Zerlegung in  $G$ -Typen).

$$V^{\text{fin}} = \bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}}^\perp V_\pi$$

und  $P_\pi := d_\pi \sigma(\chi_\pi)$  sind (orthogonale) Projektionen  $V \rightarrow V_\pi$  (falls  $\sigma$  unitär).

*Beweis.* (1) Mit Lemma 1 (ii) und den Orthogonalitätsrelationen für Charaktere folgt:

$$P_\pi|_{V_\tau} = d_\pi d_\tau^{-1} \langle \chi_\pi, \chi_\tau \rangle = \begin{cases} \text{id} & , [\pi] = [\tau] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Damit folgt die Direktheit der Summe.

(2) Wir wollen nun zeigen, dass  $P_\pi(V) \subseteq V_\pi$ . Dazu betrachten wir für ein festes  $v \in V$  dessen Bild  $w := P_\pi(v)$  sowie die kleinste Unterdarstellung  $S := \overline{\text{span}} \sigma(G)(w)$ , die  $w$  enthält. Die Abbildung

$$f : S' \rightarrow C(G), \mu \mapsto \mu(\sigma(\cdot)(w))$$

ist linear und injektiv (Satz von Hahn-Banach), und es gilt

$$\begin{aligned} f(\mu) &= \mu(\sigma(\cdot)(\int d_\pi \chi_\pi(y) \sigma(y)(v) dy)) \\ &= \int d_\pi \chi_\pi(y) \mu(\sigma(\cdot)(y)(v)) dy \\ &= \int d_\pi \underbrace{\chi_\pi(z^{-1}(\cdot))}_{=L(z)(\chi_\pi)} \mu(\sigma(z)(v)) dz \in \overline{M_\pi} = M_\pi, \end{aligned}$$

denn  $M_\pi$  ist  $L(G)$ -invariant und endlichdimensional. Mit der Injektivität von  $f$  sowie dem Satz von Hahn-Banach erkennen wir nun aber

$$d_\pi^2 \geq \dim M_\pi \geq \dim(S') = \dim(S),$$

also ist  $w$   $\sigma(G)$ -endlich. Ist  $w = \sum w_\tau$  die nach (1) eindeutige Zerlegung ( $w_\tau \in V_\tau$ ), so gilt für alle  $\mu \in V'$  nach obigem Argument

$$\underbrace{\mu(\sigma(\cdot)(w))}_{\in M_\pi} = \sum_{\in M_\tau} \underbrace{\mu(\sigma(\cdot)(w_\tau))}_{\in M_\tau}$$

Da die Matrixkoeffizienten inäquivalenter Darstellungen orthogonal sind, folgt für alle  $[\tau] \neq [\pi]$

$$\begin{aligned} \mu(\sigma(\cdot)(w_\tau)) &= 0 \quad (\forall \mu \in V') \\ \Rightarrow \sigma(\cdot)(w_\tau) &= 0 \\ \Rightarrow w_\tau &= 0 \end{aligned}$$

und damit  $w = w_\pi \in V_\pi$ .

(3) Für unitäres  $\sigma$  gilt mit Lemma 1 (i)  $P_\pi^* = P_\pi$ , d.h.  $P_\pi$  ist orthogonale Projektion.  $\square$

### 3 Matrizenkoeffizienten

Wir definieren die **Faltung** zweier stetiger Funktionen  $f, g \in C(G)$  durch

$$(f \star g)(x) := \int f(y)g(y^{-1}x)dy = \int f(xz^{-1})g(z)dz$$

**3 Lemma** (Eigenschaften der Faltung). (i)  $(C(G), \star)$  ist eine assoziative Algebra; sie ist kommutativ gdw.  $G$  kommutativ ist.

(ii)  $f \star g = L(f)(g)$ ,  $R^*(f)(g) = g \star \check{f}$

(iii)  $V$  ist  $(C(G), \star)$ -Modul vermittelt  $\sigma$ , denn es gilt  $\sigma(f) \circ \sigma(g) = \sigma(f \star g)$

*Beweis.* Siehe [DK00, S. 230].  $\square$

**4 Satz** ( $G$ -Typen und Matrizenkoeffizienten). Für die Darstellung  $\sigma = R^*$  auf  $C(G)$  bzw.  $L^2(G)$  gilt:

(i)  $C(G)_\pi = L^2(G)_\pi = M_\pi$ ,  $P_\pi = d_\pi(\cdot) \star \chi_\pi = d_\pi \chi_\pi \star (\cdot)$

(ii)  $C(G)^{fin} = L^2(G)^{fin} = \bigoplus_{[\pi]}^\perp M_\pi =: M(G)$

(iii)  $M(G) = \bigcup \{M_\sigma : \sigma \text{ endlichdim. Darstellung von } G\}$

*Beweis.* (i) Wir wissen bereits, dass

$$R^*(\cdot)|_{M_\pi} \cong \underbrace{\pi \oplus \dots \oplus \pi}_{d_\pi \text{ mal}}$$

Damit liegt  $M_\pi \subseteq C(G)_\pi \subseteq L^2(G)_\pi$  (beinahe definitionsgemäß!).

Satz 2 und Lemma 3 (ii) zeigen die Formel für  $P_\pi$  (beachte: Falten mit einer konjugationsinvarianten Funktion ist kommutativ). Dann gilt aber für  $f \in L^2(G)$

$$\begin{aligned} P_\pi f &= d_\pi \chi_\pi \star f = d_\pi R^*(\check{f})(\chi_\pi) \\ &= d_\pi \int \underbrace{\check{f}(z) R^*(z)}_{\in M_\pi} \underbrace{(\chi_\pi)}_{\in M_\pi} dz \in \overline{M_\pi} = M_\pi, \end{aligned}$$

denn  $M_\pi$  ist  $R^*(G)$ -invariant. Folglich ist  $L^2(G)_\pi = C(G)_\pi = M_\pi$ .

(ii) folgt dann unmittelbar aus Satz 2.

(iii) gilt wegen  $M_\sigma + M_\tau = M_{\sigma \oplus \tau}$ .  $\square$

## 4 Peter-Weyl

**5 Satz** (Peter-Weyl).

$$\overline{M(G)}^{\|\cdot\|_\infty} = C(G)$$

Unmittelbare Konsequenz dieser unscheinbaren Aussage ist das folgende Korollar, was die Fourierzerlegung auf beliebige kompakte Gruppen verallgemeinert.

**6 Korollar** (Abstrakte Fourierzerlegung). *Es gilt*

$$L^2(G) = HR\text{-}\bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}}^\perp M_\pi,$$

d.h. wir können jedes  $f \in L^2(G)$  zerlegen als

$$f = \sum_{[\pi] \in \hat{G}} d_\pi \chi_\pi \star f \quad (L^2\text{-Konvergenz})$$

und es gilt die **Parseval-Plancherel-Formel**

$$\|f\|^2 = \sum_{[\pi] \in \hat{G}} d_\pi \|\pi(f)\|_{HS}^2$$

Ist  $f$  konjugationsinvariant (z.B. wenn  $G$  abelsch ist), so bilden die Charaktere eine ONB, d.h. es gelten

$$f = \sum_{[\pi] \in \hat{G}} \langle f, \chi_\pi \rangle \chi_\pi \quad (L^2\text{-Konvergenz})$$

$$\|f\|^2 = \sum_{[\pi] \in \hat{G}} |\langle f, \chi_\pi \rangle|^2$$

*Beweis.* (1) Nach dem Satz von Peter-Weyl liegt  $M(G) \subseteq C(G)$  dicht; definitionsgemäß gilt die auch für  $C(G) \subseteq L^2(G)$ . Deshalb liegt auch  $M(G) \subseteq L^2(G)$  dicht, denn gleichmäßige Konvergenz impliziert  $L^2$ -Konvergenz. Nun war die Summe der Matrizenkoeffizienten gemäß Satz 4 ja direkt und orthogonal; zusammen erhalten wir also

$$L^2(G) = \overline{M(G)} = HR\text{-}\bigoplus_{[\pi] \in \hat{G}}^\perp M_\pi$$

(2) Es gelten also

$$f = \sum_{[\pi] \in \hat{G}} P_\pi(f) = \sum_{[\pi] \in \hat{G}} d_\pi \chi_\pi \star f \quad (\text{L}^2\text{-Kvz.})$$

$$\|f\|^2 = \|\bar{f}\|^2 = \sum_{[\pi] \in \hat{G}} \|P_\pi(\bar{f})\|^2,$$

(in Satz 4 hatten wir die orthog. Projektionen ausgerechnet), und die Parseval-Plancherel-Formel folgt mit

$$\begin{aligned} \|P_\pi(\bar{f})\|^2 &= \langle P_\pi(\bar{f}), \bar{f} \rangle = d_\pi \langle \bar{f} \star \chi_\pi, \bar{f} \rangle \\ &= d_\pi \int \int \bar{f}(y^{-1}x) \chi_\pi(y) f(x) dy dx \\ &= d_\pi \int \int f^*(x^{-1}y) f(x) \chi_\pi(y) dx dy \\ &= d_\pi \int (f^* \star f)(y) \chi_\pi(y) dy \\ &= d_\pi \text{tr} \int (f^* \star f)(y) \pi(y) dy \\ &= d_\pi \text{tr} \pi(f^* \star f) = d_\pi \|\pi(f)\|_{\text{HS}}^2 \end{aligned}$$

(für die letzte Gleichheit siehe Lemmata 1 (ii) und 3)

(3) Ist  $f$  konjugationsinvariant, so liefert Lemma 1 (i) für  $R^*(\check{f})$  und  $M_\pi$  die folgende Identität

$$P_\pi(f) = d_\pi \chi_\pi \star f = d_\pi R^*(\check{f})(\chi_\pi) = \langle \check{f}, \chi_\pi \rangle \chi_\pi = \langle f, \chi_\pi \rangle \chi_\pi$$

Damit haben wir das Korollar bewiesen.  $\square$

**7 Beispiel** ( $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ). Man kann nachrechnen, dass die Charaktere der abelschen Gruppe  $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  gerade die harmonischen Schwingungen

$$\chi_n : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times, x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i n x}$$

sind.

Der Satz von Peter-Weyl liefert also die gleichmäßige Approximierbarkeit stetiger Funktionen auf  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , d.h. **periodischer** stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}$ , durch Linearkombinationen der  $\{\chi_n\}$ .

Und die abstrakte Fourierzerlegung wird hier ganz konkret zu

$$\begin{aligned} f &= \sum_n \langle f, e^{2\pi i n(\cdot)} \rangle e^{2\pi i n(\cdot)} \\ &= \sum_n \underbrace{\left( \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx \right)}_{=: \hat{f}(n)} e^{2\pi i n(\cdot)} \quad (\text{L}^2\text{-Kvz.}) \end{aligned}$$

$$\|f\|^2 = \sum_n |\hat{f}(n)|^2$$

**8 Bemerkung** (Distributionelle Formulierung). Ist  $G$  eine Lie-Gruppe, so können wir den Raum der Distributionen  $C_{(0)}^\infty(G)$  betrachten. Korollar 6 liefert dann die **Plancherel-Formel**

$$\delta = \sum_{[\pi] \in \hat{G}} d_\pi \chi_\pi \quad (\text{distr. Konvergenz})$$

wobei  $\delta$  die Dirac-Distribution  $f \mapsto f(1)$  bezeichnet. Das gilt sogar im Sinne von Radonmaßen und  $L^2(G)$ -„Faltungskonvergenz“, vgl [DK00, S. 237].

Das folgende Korollar zeigt, dass wir bei der Definition des Duals  $\hat{G}$  auf die Forderung nach endlicher Dimension verzichten können.

**9 Korollar.** Jede irreduzible Darstellung  $\sigma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  auf einem vollständigen, lokalkonvexen Vektorraum ist endlichdimensional.

*Beweis.*  $V^{\text{fin}}$  ist Summe der irreduziblen endlichdim. Unterdarstellungen, da  $V$  irreduzibel ist also höchstens eine, ist also selbst endlichdimensional, und damit abgeschlossen!

Es verbleibt zu zeigen, dass  $V^{\text{fin}}$  dicht liegt in  $V$ ; dazu wollen wir den Satz von Hahn-Banach anwenden. Es sei also  $\lambda \in V'$  ein Funktional, welches  $V^{\text{fin}}$  annulliert sowie  $v \in V$  beliebig. Im Beweis von Satz 2 hatten wir die folgende Relation nachgerechnet:

$$\lambda(\sigma(x) \underbrace{(P_\pi(v))}_{\in V_\pi}) = d_\pi (\lambda(\sigma(\cdot)(v)) \star \chi_\pi)(x)$$

$$\underbrace{\in V_\pi}_{\in V_\pi \leq V^{\text{fin}}} = 0$$

Damit sind die „Fourier-Summanden“ aus Korollar 6 gleich 0, also auch  $\lambda(\sigma(\cdot)(v))$  und insbesondere  $\lambda(v)$ .  $\square$

Aus dem Satz von Peter-Weyl folgt auch, dass wir Darstellung mit „beliebig feinen“ Kernen finden. Genauer:

**10 Korollar.** In jeder Umgebung  $\Omega$  der 1 findet man den Kern einer endlichdimensionalen Darstellung.

*Beweis.* Sei  $1 \neq x \in G$  beliebig. Wir wählen eine Funktion  $f \in C(G)$  mit  $f(x) \neq f(1)$  (Lemma von Urysohn). Wegen dem Satz von Peter-Weyl können wir  $f \in M(G)$  annehmen. Nach Satz 4 (iv) ist  $f$  also Matrizenkoeffizient einer endlichdim. Darstellung  $\sigma$  und es gilt  $\sigma(x) \neq \sigma(1) = \text{id}$ , also  $x \in G \setminus \ker \sigma$ . Folglich erhalten wir folgende offene Überdeckung

$$G \setminus \Omega \subseteq G \setminus \{1\} \subseteq \bigcup_{\sigma} G \setminus \ker \sigma$$

einer kompakten Menge. Wir wählen eine endliche Teilüberdeckung  $\bigcup_{k=1}^n G \setminus \ker \sigma_k \supseteq G \setminus \Omega$  und definieren  $\tau$  als direkte Summe dieser zugehörigen Darstellungen. Dann ist  $\tau$  endlichdimensional, und es gilt

$$\ker(\tau) = \bigcap_{k=1}^n \ker \sigma_k \subseteq \Omega$$

$\square$

**11 Bemerkung.** Das Korollar zeigt, dass jede kompakte Gruppe  $G$  projektiver Limes ihrer Bilder unter den endlichdim. Darstellungen ist

$$G = \varprojlim_{\pi} G / \ker \pi = \varprojlim_{\pi} \pi(G),$$

d.h. projektiver Limes kompakter linearer Lie-Gruppen! (Idee: Universelle Eigenschaft überprüfen; die Filterbasis der Kerne ist wegen dem Korollar feiner als der Umgebungfilter der 1.)

Desweiteren können wir mit dem Korollar die folgende topologische Charakterisierung kompakter Lie-Gruppen beweisen (Schritt (ii)  $\Rightarrow$  (iii)).

**12 Korollar.** Sei  $G$  eine kompakte Gruppe. Dann sind äquivalent:

- (i)  $G$  ist eine Lie-Gruppe.
- (ii) Es existiert eine Umgebung der 1, in der die triviale einzige abgeschlossene Untergruppe ist.
- (iii)  $G$  ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von  $\text{GL}(V)$  für einen endlichdim. Vektorraum  $V$ .

## 5 Induzierte Darstellungen

Wir wollen wollen zunächst Darstellungen endlicher Gruppen studieren, wo sich die induzierte Darstellungen auf sehr natürliche Weise ergeben.

Für Ringe  $S \leq R$  betrachten wir die Kategorie der  $S$ - bzw.  $R$ -Moduln. Bekanntlich ist dann der Hom-Funktor rechtsadjungiert zur Restriktion; genauer gesagt gilt

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S(\text{Res}_S^R(M), N) &\cong \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_S(R, N)) \\ A(\cdot)(1) &\leftarrow A \\ B &\mapsto (m \mapsto r \mapsto B(r \cdot m)) \end{aligned}$$

Nun entsprechen die Darstellungen einer endlichen Gruppe  $G$  gerade den  $\mathbb{C}[G]$ -Moduln, wobei  $\mathbb{C}[G]$  den Gruppenring von  $G$  bezeichnet.

Sei also  $\sigma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung und  $H \leq G$ . Dann entspricht  $\sigma|_H$  der Restriktion  $\text{Res}_{\mathbb{C}[H]}^{\mathbb{C}[G]} V$  des zugehörigen  $\mathbb{C}[G]$ -Moduls.

Umgekehrt können wir uns nun fragen, wie für eine Darstellung  $\tau : H \rightarrow \text{GL}(U)$  die durch die Rechtsadjungierte induzierte Darstellung  $\text{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(\mathbb{C}[G], U)$  aussieht. Es stellt sich heraus, dass deren Elemente gerade Funktionen  $f : G \rightarrow U$  entsprechen, die die Bedingung

$$f(hg) = \tau(h)(f(g)) \quad (\forall g \in G, h \in H)$$

Dies motiviert die folgende Definition (nach Umformulierung in die Rechtsmodulvariante; wieso eigentlich...).

**13 Definition.** Sei  $G$  eine Lie-Gruppe,  $H \leq G$  abgeschlossen und  $\tau : H \rightarrow \text{GL}(U)$  eine endlichdim. Darstellung. Dann heißt die durch

$$\begin{aligned} V &:= \{f \in C(G, U) : f(gh) = \tau(h^{-1})(f(g)) \forall h \in H\}, \\ \text{Ind}_H^G(\tau) &:= L(\cdot)|_V \end{aligned}$$

definierte die durch  $\tau$  von  $H$  auf  $G$  **induzierte Darstellung**.

So erhält man einen Funktor  $\text{Ind}_H^G$ , der tatsächlich rechtsadjungiert zur Restriktion ist:

**14 Satz** (Frobenius-Reziprozität). Für je zwei Darstellungen  $\sigma, \tau$  von  $G, H$  haben wir den kanonischen Isomorphismus

$$\text{Hom}_G(\sigma, \text{Ind}_H^G \tau) \rightarrow \text{Hom}_H(\sigma|_H, \tau), A \mapsto A(\cdot)(1)$$

*Beweis.* Siehe [DK00, Satz 4.7.1]. □

**15 Bemerkung** (Geometrische Charakterisierung). Der Bahnenraum  $G \times_H U$  der Darstellung

$$R \times \tau : H \rightarrow \text{GL}(G \times U), h \mapsto (g, u) \mapsto (gh^{-1}, \tau(h)(u))$$

wird mittels  $\pi_{G/H} \circ \pi_1$  zu einem homogenen Vektorbündel über  $G/H$  mit Faser  $U$  (vgl. [DK00, Kapitel 2.4]). Er ist auch  $G$ -Modul mittels Multiplikation in der ersten Komponente.

Ist nun  $s : G/H \rightarrow G \times_H U$  ein stetiger Schnitt, dann gehört zu jedem  $g \in G$  in stetiger Weise ein  $f(g) \in U$  mit

$$\begin{aligned} s(gH) &= [(g, f(g))] = [(gh, f(gh))] = [(g, \sigma(h)(f(gh)))] \\ \Rightarrow f(gh) &= \sigma(h^{-1})f(g) \end{aligned}$$

Andererseits erhält man für jedes solche  $f$  einen stetigen Schnitt. Somit entspricht  $\text{Ind}_H^G(\tau)$  dem Raum der **stetigen Schnitte** von  $G \times_H U$ .

Man kann jetzt noch nachrechnen, dass die korrespondierende Wirkung auf den Schnitten gerade  $g \mapsto s \mapsto gs(g^{-1}(\cdot))$  ist.

## Literatur

[DK00] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Lie Groups*. Springer, 2000.