

Tutorium 13

1 Separable Körpererweiterungen

1 Definition. Sei L/K algebraische Körpererweiterung und \bar{K} der algebraische Abschluss von K .

- (a) $f \in K[X] \setminus K$ heißt *separabel*, falls f $\deg(f)$ verschiedene Nullstellen in \bar{K} hat (d.h. genau dann, wenn f keine doppelten Nullstellen in \bar{K} hat)
- (b) $\alpha \in L$ heißt *separabel* über K , falls das Minimalpolynom $m_\alpha \in K[X]$ von α separabel ist
- (c) L/K heißt *separabel*, falls alle $\alpha \in L$ separabel über K sind

2 Bemerkung. Sei $f \in K[X] \setminus K$. Dann gilt:

$$f \text{ separabel} \Leftrightarrow \gcd(f, f') = 1$$

(f' ist die "formale" Ableitung.) Ist f zusätzlich irreduzibel, dann gilt sogar:

$$f \text{ separabel} \Leftrightarrow f' \neq 0$$

3 Definition. K heißt *vollkommen*, falls jede algebraische Erweiterung separabel ist.

4 Aufgabe. Zeige:

$$\text{char}(K) = 0 \Rightarrow K \text{ vollkommen}$$

Beweis. Sei L/K algebraische Erweiterung, $\alpha \in L$ mit Minimalpolynom $m_\alpha = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} m'_\alpha &= 0 \\ \Rightarrow \forall i = 0, \dots, n : i \cdot a_i &= 0 \\ \Rightarrow \forall i = 1, \dots, n : a_i &= 0 \\ \Rightarrow \deg(m_\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

Widerspruch! Also $m'_\alpha \neq 0$, also ist das (irreduzible!) Minimalpolynom m_α separabel, d.h. α ist separabel über K . \square

5 Definition. Sei L/K endliche Körpererweiterung und \bar{K} der algebraische Abschluss von K .

$$[L : K]_s := \# \text{Hom}_K(L, \bar{K})$$

heißt *Separabilitätsgrad* von L über K .

6 Satz. (a) $[L : K]_s \leq [L : K]$

(b) $[L : K]_s = [L : K] \Leftrightarrow L/K$ separabel

(c) M Zwischenkörper $\Rightarrow [L : K]_s = [L : M]_s \cdot [M : K]_s$

7 Aufgabe. Sei L/K algebraische Körpererweiterung, $\alpha, \beta \in L$. Zeige:

(a) α separabel über $K \Rightarrow K(\alpha)/K$ separabel

(b) α, β separabel über $K \Rightarrow \alpha + \beta, \alpha\beta$ separabel über K

Beweis. (a) Ist α separabel, so hat das Minimalpolynom $m_\alpha \in K[X]$ keine doppelten Nullstellen, d.h. $\deg(m_\alpha) = [K(\alpha) : K]$ verschiedene.

Damit gibt es dann $[K(\alpha) : K]$ viele K -Homomorphismen $K(\alpha) \rightarrow \bar{K}$, denn wir können α auf jede Nullstelle von m_α schicken, und durch die Wahl des Bilds von α ist jeder solche Homomorphismus bestimmt.

Es gilt also $[K(\alpha) : K]_s = [K(\alpha) : K]$, mit dem Satz folgt, dass $K(\alpha)/K$ separabel ist.

(b) Sei $m_\beta^K \in K[X]$ das Minimalpolynom von β über K sowie $m_\beta^{K(\alpha)} \in K(\alpha)[X]$ das Minimalpolynom von β über $K(\alpha)$.

Wir wissen: m_β^K ist immer noch annullierend in $K(\alpha)[X]$, d.h. $m_\beta^{K(\alpha)} \mid m_\beta^K$. Nun ist β separabel über K , d.h. m_β^K hat keine doppelten Nullstellen. Dann kann aber auch $m_\beta^{K(\alpha)}$ keine doppelten Nullstellen haben! Folglich ist β auch separabel über $K(\alpha)$.

Mit (a) folgt, dass $K(\alpha)/K$ und $K(\alpha, \beta) = K(\alpha)(\beta)/K(\alpha)$ separabel sind, und dem Satz die Behauptung. \square

8 Satz. Sei $\text{char}(K) = p > 0$.

(a) Ist $f \in K[X]$ irreduzibel, so existiert ein $g \in K[X]$ irreduzibel und separabel mit

$$f = g(X^{p^k})$$

für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und jede Nullstelle von f hat Vielfachheit p^k .

(b) Ist L/K endliche Körpererweiterung, dann

$$[L : K] = p^l [L : K]_s$$

für ein $l \in \mathbb{N}_0$.

Beweisidee. (von (a)) Der interessante Fall ist der, dass das irreduzible $f = \sum a_i X^i$ nicht separabel ist. Dann sagt die Bemerkung oben dass $f' = 0$ gilt, d.h. $a_i = 0$ für $p \nmid i$ und f ist ein Polynom in X^p . Induktiv folgt die Behauptung, d.h.

$$f = e(X^{p^k} - a_1) \cdots (X^{p^k} - a_m)$$

(mit paarweise verschiedenen a_i , denn g ist separabel, und dem Faktor $e = a_{\deg(f)}$).

Ist nun a eine Nullstelle von f , also z.B. $a^{p^k} = a_1$, dann gilt

$$(X - a)^{p^k} = X^{p^k} - a^{p^k} = X^{p^k} - a_1 \mid f$$

und a hat Vielfachheit p^k . □

9 Aufgabe. Sei $\text{char}(K) = p > 0$, $f \in K[X]$ normiert. Zeige:

(a) $f = X^{p^n} - c$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, $c \in K \Rightarrow f$ hat genau eine Nullstelle in \bar{K} ,
und \Leftarrow gilt zumindest wenn f irreduzibel ist

(b) Es gibt reduzible und irreduzible Polynome mit genau einer Nullstelle in \bar{K}

(c) Sei L/K Körpererweiterung, $\alpha \in L$ algebraisch über K und das Minimalpolynom $m_\alpha \in K[X]$ habe genau eine Nullstelle in \bar{K} . Berechne $\text{Hom}_K(K(\alpha), \bar{K})$.

Beweis. (a) (\Rightarrow) Ist $a \in \bar{K}$ eine der Nullstellen von $f = X^{p^n} - c$, dann gilt

$$(X - a)^{p^n} = X^{p^n} - a^{p^n} = X^{p^n} - c = f$$

und f hat *genau eine* Nullstelle.

(\Leftarrow) Gilt im allgemeinen nicht, z.B. für $f = (X - 1)^2 \in \mathcal{F}_3[X]$. Für irreduzible Polynome folgt das mit dem Satz, denn ist $f = g(X^{p^k})$ mit g separabel, dann hatte ja jede Nullstelle VF p^k . Wenn es nur eine gibt, dann folgt also $\deg(f) = p^k$ und $\deg(g) = 1$, und somit die gewünschte Form für f .

(b) Aus der Vorlesung bekannt: Betrachte $K = \mathcal{F}_p(t)$, wobei t transzendent über \mathcal{F}_p ist (z.B. $X!$). Dann ist $X^p - t$ irreduzibel in $K[X]$ (im wesentlichen mit Eisenstein, wenn man erkennt dass t prim ist!).

Andererseits ist $X^{p^k} + 1 = (X + 1)^{p^k}$ (offenbar) reduzibel über $\mathcal{F}_p[X]$.

(c) Es gibt genau einen K -Homomorphismus $\phi : K(\alpha) \rightarrow \bar{K}$; er schickt α auf die einzige Nullstelle des Minimalpolynoms, also auf α !

Folglich $\phi = \text{id}_{K(\alpha)}$, und $\text{Hom}_K(K(\alpha), \bar{K})$ ist die triviale Gruppe. □

10 Aufgabe. Sei $\text{char}(K) = p > 0$, L/K Körpererweiterung, $\alpha \in L$ algebraisch über K . Zeige:

$$\alpha \text{ separabel} \quad \Leftrightarrow \quad K(\alpha) = K(\alpha^p)$$

Beweis. (\Leftarrow) Ist α nicht separabel, so existiert ein separables, irreduzibles Polynom $g \in K[X]$ und $k \in \mathbb{N}_+$ mit

$$m_\alpha = g(X^{p^k})$$

und $g(X^{p^{k-1}})$ ist annullierendes Polynom von α^p !

$$\Rightarrow [K(\alpha^p) : K] \leq \deg(g(X^{p^{k-1}})) = p^{k-1} \deg(g) < p^k \deg(g) = \deg(m_\alpha) = [K(\alpha) : K]$$

Also gilt $K(\alpha^p) \subsetneq K(\alpha)$.

(\Rightarrow) Sei α separabel. Ist $\sigma \in \text{Hom}_K(K(\alpha), \bar{K})$, dann gilt $\sigma|_{K(\alpha^p)} \in \text{Hom}_K(K(\alpha^p), \bar{K})$.

Sei ferner $\tau \in \text{Hom}_K(K(\alpha), \bar{K})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sigma|_{K(\alpha^p)} &= \tau|_{K(\alpha^p)} \\ \Rightarrow \sigma(\alpha^p) &= \tau(\alpha^p) \\ \Rightarrow 0 &= \sigma(\alpha)^p - \tau(\alpha)^p = (\sigma(\alpha) - \tau(\alpha))^p \\ \Rightarrow \sigma(\alpha) &= \tau(\alpha) \\ \Rightarrow \sigma &= \tau \end{aligned}$$

Also ist $\sigma \mapsto \sigma|_{K(\alpha^p)}$ eine Injektion, und

$$[K(\alpha) : K] = [K(\alpha) : K]_s \leq [K(\alpha^p) : K]_s \leq [K(\alpha^p) : K]$$

und wegen $K(\alpha^p) \subseteq K(\alpha)$ folgt $[K(\alpha) : K] = [K(\alpha^p) : K]$, d.h. $K(\alpha) = K(\alpha^p)$. □

11 Aufgabe (Trick für das ÜB). Sei $\text{char}(K) = p > 0$, $f = X^p - X - a \in K[X]$, $a \in K$, $x \in \bar{K}$ Zeige:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x+1) = 0$$

Beweis.

$$f(x+1) = (x+1)^p - (x+1) - a = x^p - x - a + 1^p - 1 = f(x) = 0$$

□

12 Satz. (vom primitiven Element) Sei L/K endlich und separabel. Dann ist L/K sogar einfach.

Beweisidee. (nicht wirklich. . .) Ist L endlich, so ist L^x zyklisch und wir adjungieren einfach den Erzeuger.

Ist L unendlich, dann genügt es immerhin, die Behauptung für eine Erweiterung $L = K(\alpha_1, \alpha_2)$ zu zeigen, die allgemeine Behauptung für endliche Körpererweiterungen folgt dann induktiv.

Vorlesung: Das primitive Element, d.h. das α mit $L = K(\alpha)$, hat die Form

$$\alpha = \alpha_1 + \lambda \alpha_2$$

für ein $\lambda \in K$. Ausprobieren klappt meistens, z.B. $\lambda = 1$! □

13 Aufgabe. Bestimme ein primitives Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$.

Lösung. Rate $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$. Dann:

$$\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$$

$$\alpha^2 = 7 + 2\sqrt{10}$$

$$\alpha^3 = 17\sqrt{2} + 11\sqrt{5}$$

Aha! Damit gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \frac{\alpha^3 - 11\alpha}{6} \in \mathbb{Q}(\alpha) \\ \Rightarrow \sqrt{5} &= \alpha - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha) \\ \Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) &\subseteq \mathbb{Q}(\alpha)\end{aligned}$$

□

2 Endliche Körper

14 Proposition. Ist K Körper, so ist jede endliche Untergruppe von K^x zyklisch.

15 Satz. Sei \mathcal{F}_{p^n} der Zerfällungskörper von $X^{p^n} - X \in \mathcal{F}_p[X]$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(i) $\#\mathcal{F}_{p^n} = p^n$

(i) K endlicher Körper $\Rightarrow K \cong \mathcal{F}_{p^n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $p = \text{char}(K)$

16 Satz. Jede algebraische Erweiterung eines endlichen Körpers ist separabel.

17 Aufgabe. Zeige:

$$\mathcal{F}_{p^n} \subseteq \mathcal{F}_{p^m} \Leftrightarrow n \mid m$$

Beweis. (\Rightarrow) \mathcal{F}_{p^m} ist dann \mathcal{F}_{p^n} -Vektorraum, also

$$\begin{aligned} p^m &= \#\mathcal{F}_{p^m} = (\#\mathcal{F}_{p^n})^{\dim_{\mathcal{F}_{p^n}}(\mathcal{F}_{p^m})} = (p^n)^{\dim_{\mathcal{F}_{p^n}}(\mathcal{F}_{p^m})} \\ \Rightarrow m &= n \cdot \dim_{\mathcal{F}_{p^n}}(\mathcal{F}_{p^m}) \\ \Rightarrow n &\mid m \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Wir wollen zeigen:

$$X^{p^n} - X \mid X^{p^m} - X$$

Dann wäre jede Nullstelle des linken auch Nullstelle des rechten Polynoms, d.h. \mathcal{F}_{p^m} würde \mathcal{F}_{p^n} enthalten (denn letztere sind ja gerade die jeweiligen Zerfällungskörper).

Sei also $n \cdot k = m$. Bekanntlich gilt in jedem kommutativen Ring, dass $x - 1 \mid x^k - 1$ (*)

$$\begin{aligned} &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} p^n - 1 \mid (p^n)^k - 1 = p^m - 1 \\ &\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : (p^n - 1) \cdot l = p^m - 1 \\ &\Rightarrow (X^{p^n-1})^l = X^{p^m-1} \\ &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} X^{p^n-1} - 1 \mid (X^{p^n-1})^l - 1 = X^{p^m-1} - 1 \\ &\Rightarrow X^{p^n} - X \mid X^{p^m} - X \end{aligned}$$

□

18 Aufgabe. Verstehe \mathcal{F}_4 .

Beweis. \mathcal{F}_4 ist nach Definition der Zerfällungskörper des Polynoms

$$X^4 - X = X(X - 1) \underbrace{(X^2 + X + 1)}_{\text{irreduzibel, keine NST!}} \in \mathcal{F}_2[X]$$

Adjungiere Nullstelle α von $X^2 + X + 1$ (Kronecker-Konstruktion)

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}_2(\alpha) : \mathcal{F}_2] &= \deg(X^2 + X + 1) = 2 \\ \Rightarrow \#\mathcal{F}_2(\alpha) &= 2^2 = 4 \\ \Rightarrow \mathcal{F}_2(\alpha) &\cong \mathcal{F}_4 \end{aligned}$$

Wir wissen auch, dass $\{1, \alpha\}$ eine \mathcal{F}_2 -Basis von \mathcal{F}_4 ist.

Man stellt dann unter Ausnutzung von $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ und $-x = x$ in \mathcal{F}_2 leicht folgende Additions- und Multiplikationstabelle auf:

+	0	1	α	$\alpha + 1$
0	0	1	α	$\alpha + 1$
1	1	0	$\alpha + 1$	α
α	α	$\alpha + 1$	0	1
$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	α	1	0

Die additive Gruppe von \mathcal{F}_4 ist also isomorph zu \mathcal{F}_2^2 , was zu erwarten war — \mathcal{F}_4 ist ja \mathcal{F}_2 -Vektorraum der Dimension 2!

\cdot	1	α	$\alpha + 1$
1	1	α	$\alpha + 1$
α	α	$\alpha + 1$	1
$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	1	α

Und die Einheitengruppe \mathcal{F}_4^x ist zyklisch; das bestätigt die Proposition von oben.

□