

Tutorium 5

Michael Walter

1 Der chinesische Restsatz

1 Satz (Chinesischer Restsatz). *Es sei R ein kommutativer Ring und $I, J \subseteq R$ Ideale, und $i_0 \in I$ mit $1 - i_0 \in J$. Dann ist*

$$\Phi : R \rightarrow R/I \times R/J, x \mapsto (x + I, x + J)$$

ein surjektiver Homomorphismus mit Kern $I \cap J$.

Ein Urbild von $(r + I, s + J)$ ist dabei gegeben durch $(1 - i_0)r + i_0s$.

Insbesondere gilt: $R/(I \cap J) \cong R/I \times R/J$.

2 Aufgabe. Sei R ein kommutativer Ring sowie $a, b \in R$ mit

$$ar + br' = 1$$

für bestimmte $r, r' \in R$. Dann gilt:

$$aR \cap bR = abR$$

Beweis. (\supseteq) ist klar. (\subseteq) Sei $x = as = bs' \in aR \cap bR$. Dann gilt:

$$x = 1x = arx + br'x = abrs' + abr's \in abR$$

3 Bemerkung. Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sind teilerfremd gdw. es $r, r' \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ar + br' = 1$, also gdw. es $i_0 \in a\mathbb{Z}$ gibt mit $1 - i_0 \in b\mathbb{Z}$.

4 Satz (Chinesischer Restsatz für \mathbb{Z}). *Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ paarweise teilerfremd. Dann hat das System von Kongruenzen*

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \pmod{a_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv r_n \pmod{a_n} \end{aligned}$$

eine Lösung (für beliebige aber feste $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$). Sie ist eindeutig bis auf Vielfache von $\prod a_k$.

Beweis. Wir beweisen: Es gibt ein t , so dass das System äquivalent ist zu

$$x \equiv t \pmod{\prod a_k}$$

Deshalb genügt es den Fall $n = 2$ zu betrachten (dann kombiniert man nacheinander zwei Kongruenzen, bis nur noch eine übrig bleibt).

Wir suchen also ein Urbild von $(r_1 + a_1\mathbb{Z}, r_2 + a_2\mathbb{Z})$ unter dem Homomorphismus

$$\Phi : \mathbb{Z} \rightarrow a_1\mathbb{Z} \times a_2\mathbb{Z}, x \mapsto (x + a_1\mathbb{Z}, x + a_2\mathbb{Z})$$

Der chinesische Restsatz liefert so eines, und es ist eindeutig bis auf ein Element aus $a_1\mathbb{Z} \cap a_2\mathbb{Z} = a_1a_2\mathbb{Z}$, d.h. bis auf Vielfache von a_1a_2 (vgl. Aufgabe 2). \square

5 Aufgabe. Finde $x \in \mathbb{Z}$ so dass gilt:

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{5} \\x &\equiv 4 \pmod{7} \\x &\equiv 5 \pmod{9}\end{aligned}$$

Lösung. (1) Wir suchen ein Urbild t von

$$(2 + 5\mathbb{Z}, 4 + 7\mathbb{Z})$$

Wegen $3 \cdot 5 + (-2) \cdot 7 = 1$ können wir $i_0 := 3 \cdot 5 = 15$ wählen und erhalten die äquivalente Kongruenz

$$t \equiv (1 - 15) \cdot 2 + 15 \cdot 4 \equiv 32 \equiv -3 \pmod{35}$$

(2) Nun suchen wir ein Urbild t von

$$(-3 + 35\mathbb{Z}, 5 + 9\mathbb{Z})$$

Es gilt $(-1) \cdot 35 + 4 \cdot 9 = 1$, also wählen wir $i_1 := -35$ und erhalten

$$t \equiv (1 - (-35)) \cdot (-3) + (-35) \cdot 5 \equiv -283 \equiv 32 \pmod{315}$$

Man hätte allerdings schon am Ende von Schritt 1 sehen können, dass 32 eine Lösung ist. . . \square

2 Moduln

6 Definition. Sei R ein Ring. Eine R -Modul ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$ zusammen mit einer Skalarmultiplikation $\cdot : R \times M \rightarrow M$ so dass gelten:

$$(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$$

$$1 \cdot m = m$$

$$(r + s) \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b + s \cdot a + s \cdot b$$

7 Beispiel. Ist k ein Körper, so sind die k -Moduln genau die k -Vektorräume.

8 Beispiel. R ist selbst R -Modul mit der Ringmultiplikation.

9 Beispiel. Sei M eine beliebige Menge. Dann ist $\text{Abb}(M, R)$ ein R -Modul mit

$$(r \cdot f)(m) := rf(m)$$

10 Beispiel. R ist S -Modul für jeden Teilring $S \subseteq R$.

11 Beispiel. Jede abelsche Gruppe M hat eine eindeutige \mathbb{Z} -Modulstruktur.

12 Bemerkung. R -Moduln entsprechen abelschen Gruppen mit Homomorphismen $\Phi : R \rightarrow \text{End}((M, +))$ in deren Endomorphismenring.

13 Definition. Ein *Untermodul* U ist eine Untergruppe $U \subseteq (M, +)$ mit $RU \subseteq U$.

14 Beispiel. Jedes Ideal $I \subseteq R$ ist ein Untermodul des R -Moduls R , insbesondere also selbst R -Modul.

15 Beispiel. Die Abbildungen mit endlichem Träger $\text{Abb}_0(M, R)$ bilden einen Untermodul von $\text{Abb}(M, R)$.

16 Definition. Das *Modulerzeugnis* von $X \subseteq M$ ist definiert als

$$\langle X \rangle_{R\text{-mod}} := \bigcap \{U : U \subseteq M \text{ Untermodul}, X \subseteq U\}$$

17 Bemerkung. $\langle X \rangle_{R\text{-mod}}$ ist der kleinste Untermodul von M , der X enthält. (2) Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Ann}_R(R/I) &= \{r \in R : rs + I = 0 + I \ (\forall s \in R)\} \\ &= \{r \in R : rs \in I \ (\forall s \in R)\} = I \end{aligned}$$

18 Definition. Ein R -Modulhomomorphismus $\Phi : M \rightarrow N$ erfüllt (betrachte $s = 1$). □

$$\begin{aligned} \Phi(m + n) &= \Phi(m) + \Phi(n) \\ \Phi(rm) &= r\Phi(m) \end{aligned}$$

19 Definition. Der *Annihilator* des R -Moduls M in R ist definiert durch

$$\text{Ann}_R(M) := \{r \in R : rm = 0 \ (\forall m \in M)\}$$

20 Aufgabe. $\text{Ann}_R(M) \subseteq R$ ist ein Ideal.

Beweis. (1) $\text{Ann}_R(M)$ ist Untergruppe, denn: $0 \in \text{Ann}_R(M)$ und für $r, s \in \text{Ann}_R(M)$ gilt

$$(r - s)m = rm - sm = 0 \ (\forall m \in M)$$

(2) Für $s \in R, r \in \text{Ann}_R(M)$ gilt

$$(sr)m = s(rm) = s0 = 0 \ (\forall m \in M)$$

Also ist $\text{Ann}_R(M)$ sogar ein Ideal. □

21 Aufgabe. Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist R/I ein R -Modul, und es gilt

$$\text{Ann}_R(R/I) = I$$

Beweis. (1) Offensichtlich definiert

$$\cdot : R \times R/I \rightarrow R/I, (r, s + I) \mapsto rs + I$$

eine R -Modulstruktur auf R/I .

3 Algebren

22 Definition. Sei R ein kommutativer Ring. Eine R -Algebra A ist sowohl Ring als auch R -Modul, so dass gelten:

$$r \cdot (ab) = (r \cdot a)b = a(r \cdot b) \quad (\forall r \in R, a, b \in A)$$

(d.h. die Ringmultiplikation ist R -bilinear).

23 Bemerkung. Äquivalent: Eine R -Algebra A ist ein Ring zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\sigma : R \rightarrow A$ (sog. *Strukturhomomorphismus*) mit

$$\sigma(r)a = a\sigma(r) \quad (\forall r \in R, a \in A)$$

Gegeben eine R -Modulstruktur nimmt man einfach $\sigma : r \mapsto r \cdot 1$. Und ausgehend von σ erhält man eine R -Modulstruktur via $r \cdot a := \sigma(r)a$.

24 Beispiel. $R^{n \times n}$ ist eine R -Algebra.

25 Definition. Das *Zentrum* eines Rings A ist definiert als

$$Z(A) := \{a \in A : ab = ba \quad (\forall b \in A)\}$$

26 Bemerkung. Ist der Strukturhomomorphismus injektiv, dann kann man R als Teilring des Zentrums $Z(A)$ ansehen, und also auch als Teilring von A selbst.

Andersrum ist $Z(A)$ der größte Teilring $R \subseteq A$ bzgl. dem A noch R -Algebra ist (mit der Inklusion als Strukturhomomorphismus).

27 Definition. Eine *Unteralgebra* U von A ist Teilring und Untermodul.

28 Definition. Das *Algebrenenerzeugnis* von $X \subseteq A$ ist definiert als

$$A[X] := \langle X \rangle_{R\text{-Alg}} := \bigcap \{U : U \subseteq A \text{ Unteralgebra, } X \subseteq U\}$$

29 Bemerkung. $A[X]$ ist die kleinste Unteralgebra von A , die X enthält.

30 Definition. Ein R -Algebrenhomomorphismus $\Phi : A \rightarrow B$ erfüllt

$$\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$$

$$\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$$

$$\Phi(1) = 1$$

$$\Phi(ra) = r\Phi(a)$$

31 Notation. $\text{Hom}_{R\text{-Alg}}(A, B)$ bezeichnet die Menge aller R -Algebrenhomomorphismen, und $\text{Aut}(A|R) := \text{Aut}_{R\text{-Alg}}(A, B)$ die Gruppe der R -Algebrenautomorphismen.

4 Monoidringe

32 Definition. Ist R ein kommutativer Ring und (M, \cdot) ein Monoid, so wird der *Monoidring* $(R[M], +, \star)$ definiert durch

$$R[M] := \text{Abb}(M, R)_0$$

$$(f \star g)(m) := \sum_{xy=m} f(x)g(y)$$

Ist M sogar Gruppe, dann heißt $R[M]$ *Gruppenring*.

33 Bemerkung. Für $m \in M$ definiere $\delta_m \in R[M], n \mapsto \delta_{m,n}$. Dann lässt sich jedes $f \in R[M]$ als R -Linearkombination schreiben:

$$f = \sum_m f(m)\delta_m$$

Und mit $\delta_m \star \delta_n = \delta_{mn}$ ergibt sich recht natürlich

$$f \star g = \left(\sum_m f(m)\delta_m \right) \star \left(\sum_n g(n)\delta_n \right) = \sum_{m,n} f(m)g(n)\delta_{mn}$$

was im Nachhinein die Multiplikationsvorschrift motiviert. Man erkennt nun auch leicht, dass δ_1 das neutrale Element des Monoidrings ist.

34 Bemerkung. Der Monoidring $R[M]$ ist sogar eine R -Algebra via

$$(r \cdot f)(m) := rf(m)$$

(vgl. Beispiel 15).

35 Beispiel. $R[(\mathbb{N}_0, +)]$ ist der Polynomring in einer Variablen!

Die übliche Notation erhält man, wenn man $R[X] := R[\mathbb{N}_0]$ und $X := \delta_1$ setzt, dann gilt nämlich $X^n \star X^m = X^{n+m}$, und die Elemente in $\mathbb{R}[X]$ sind gerade die endlichen Linearkombinationen

$$\sum_n a_n \delta_n = \sum_n a_n X^n$$

36 Aufgabe. R ist Teilring von $(R[M], +, \star)$ und M ist Untermonoid von $(R[M], \star)$.

Ist M Gruppe, dann ist M Untergruppe von $(R[M]^x, \star)$.

Beweis. (1) Der Ringhomomorphismus

$$\iota : R \rightarrow R[M], r \mapsto r\delta_1$$

ist injektiv.

(2) Der Monoidhomomorphismus

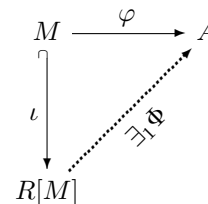
$$M \rightarrow R[M], m \mapsto \delta_m$$

ist injektiv. □

37 Satz (UAE des Monoidrings). *Für jede R -Algebra A und jeden Monoidhomomorphismus $\varphi : (M, \cdot) \rightarrow (A, \cdot)$ existiert genau ein R -Algebrenhomomorphismus $\Phi : R[M] \rightarrow A$ mit*

$$\Phi(\delta_m) = \varphi(m)$$

Als Bild:



38 Aufgabe. Finde einen surjektiven R -Algebrenhomomorphismus $\mathbb{R}[S_3] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Lösung. (1) Wir konstruieren einen Monoidhomomorphismus $\varphi : S_3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, der die gesuchte Abbildung induzieren soll. Diese wird wohl injektiv sein, d.h. wir suchen eine Untergruppe von $GL(2, \mathbb{R})$ isomorph zur S_3 . Spontan

denkt man vielleicht an die Symmetriegruppe eines Dreieck: Setzt man

$$\begin{aligned}\tau &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \pi &:= \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dann gilt $\text{ord}(\tau) = 2$, $\text{ord}(\pi) = 3$, und an

$$\begin{aligned}\tau\pi\tau^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & \sin(\frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{4\pi}{3}) & -\sin(\frac{4\pi}{3}) \\ \sin(\frac{4\pi}{3}) & \cos(\frac{4\pi}{3}) \end{pmatrix} = \pi^2\end{aligned}$$

erkennt man, dass die von τ und π erzeugte Untergruppe G Ordnung 6 hat und nichtabelsch ist, d.h. isomorph zur S_3 . Der Isomorphismus gibt uns das gesuchte φ .

(2) Noch zu zeigen ist die Surjektivität, d.h. dass wir durch \mathbb{R} -Linearkombinationen von Elementen aus G ganz $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ erzeugen können.

Via $\pi + \pi^2$ erhalten wir $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und damit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich auch $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aus π .

Und via $\pi - \pi^2$ erhält man $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und damit die restlichen Basiselemente $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. \square