Tutorium 8 – Über den Elementarteilersatz

Michael Walter

1 Satz (Elementarteilersatz)**.** *Sei R ein Hauptidealring und U ein Untermodul des R-Moduls R^n. Dann existieren eine Basis $b_1, \ldots, b_n$ von R^n, $d \in \mathbb{N}_0$, $d \leq n$ und $r_1 | \ldots | r_d \in R$, so dass $r_1 b_1, \ldots, r_d b_d$ eine Basis von U ist. Die r_i heißen* Elementarteiler *von U; sie sind eindeutig bestimmt bis auf Einheiten. Weiter gilt:*

$$R^n/U \cong \bigoplus_{i=1}^{d} R/r_i R \oplus R^{n-d}$$

Beweis. Siehe Vorlesung (Beweis des Elementarteilersatzes und des Struktursatzes). □

2 Bemerkung. Wir reden im Folgenden zwar immer von "den" Elementarteilern, die Aussagen gelten aber immer nur bis auf Einheiten (d.h. Assoziation).

3 Aufgabe. Sei R ein Hauptidealring, $U \subseteq R^n$ ein Untermodul von Rang n und r_n "der" größte Elementarteiler. Dann gilt:

$$\mathrm{Ann}_R(R^n/U) = r_n R$$

Beweis. Der Elementarteilersatz liefert

$$R^n/U \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R/r_i R$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}_R(R^n/U) &= \{r \in R : rx = 0 \text{ für alle } x \in \oplus_{i=1}^n R/r_i R\} \\ &= \{r \in R : r_1 | r, \ldots, r_n | r\} = r_n R\end{aligned}$$

□

4 Aufgabe. Sei k ein Körper und $A \in k^{n \times n}$ eine Matrix.

Dann ist "der" größte Elementarteiler des Untermoduls $(X - A)k[X]^n \subseteq k[X]^n$ gerade das Minimalpolynom $\mathrm{MP}(A, X)$.

Beweis. (1) Nochmal ganz deutlich: $(X - A)k[X]^n$ meint das Bild des Endomorphismus

$$X - A : k[X]^n \to k[X]^n, v \mapsto (X 1_{k^{n \times n}} - A)v$$

(2) Nun gilt für alle $v \in k[X]^n/(X - A)k[X]^n$ natürlich

$$\begin{aligned}&(X - A)v = 0 \\ \Rightarrow &Xv = Av \\ \Rightarrow &pv = p(A)v \qquad \text{für alle } p \in k[X]\end{aligned}$$

(d.h. im Quotienten ist Multiplikation mit X nichts anderes als Multiplikation mit der Matrix A!).

Wir können jetzt den Annihilator des Quotientenmoduls explizit berechnen:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ann}(k[X]^n/(X-A)k[X]^n) \\
=\ &\{p \in k[X] : pv = 0 \quad \forall v \in k[X]^n/(X-A)k[X]^n\} \\
=\ &\{p \in k[X] : p(A)v = 0 \quad \forall v \in k[X]^n/(X-A)k[X]^n\} \\
=\ &\{p \in k[X] : p(A) = 0\} \\
=\ &\operatorname{MP}(A,X)k[X]
\end{aligned}$$

(3) Andererseits hat $X - A$ vollen Rang, d.h. der Untermodul $(X-A)k[X]^n \subseteq k[X]^n$ hat Rang n und die vorherige Aufgabe liefert:

$$\operatorname{Ann}(k[X]^n/(X-A)k[X]^n) = r_n k[X]$$

□

5 Bemerkung. Wir sehen jetzt auch: Der $k[X]$-Modul k^n mit $pv := p(A)v$ ist isomorph zu $k[X]^n/(X-A)k[X]^n$ mit der üblichen (punktweisen) Skalarmultiplikation.

Denn wegen der Rechenregel $Xv = Av$ aus dem Beweis ist

$$k^n \to k[X]^n/(X-A)k[X]^n, v \mapsto v$$

ein Isomorphismus! Insbesondere haben beide Räume dann (als k-Vektorräume aufgefasst) Dimension n.

6 Aufgabe. Sei k ein Körper und

$$A := \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \in k^{3\times 3}$$

Berechne "die" Elementarteiler von $(X-A)k[X]^3 \subseteq k[X]^3$.

Lösung. Zunächst klar: Es gibt drei Elementarteiler ($X - A$ hat vollen Rang), es gilt

$$k[X]^3/(X-A)k[X]^3 \cong \bigoplus_{i=1}^{3} R/r_iR$$

und dieser Quotient hat (als k-Vektorraum aufgefasst) Dimension 3.

1. Fall: $a \neq b$: Nach der vorherigen Aufgabe ist der größte Elementarteiler

$$r_3 = \operatorname{MP}(A,X) = (X-a)^2(X-b)$$

Aber $k[X]/(X-a)^2(X-b)k[X]$ hat (also k-Vektorraum) schon Dimension 3, also müssen die anderen Elementarteiler Einheiten sein, d.h. $r_1 = r_2 = 1$.

2. Fall: $a = b$: Nach der vorherigen Aufgabe ist der größte Elementarteiler

$$r_3 = \operatorname{MP}(A,X) = (X-a)^2$$

Es fehlt uns noch ein Summand von Dimension 1. Wegen $r_1|r_2|r_3$ folgt $r_1 = 1$, $r_2 = (X-a)$. □