Tutorium 1

1 Einführung

Email michael.walter@gmail.com

Homepage http://math.leetspeak.org/la2/

2 Themen LA 1

Algebraische Strukturen wie Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum mit zugehörigen Homomorphismen (insbesondere lineare Abbildungen).

LGSe, Matrizen und lineare Abbildungen mit Gauß-Algorithmus, Rang vs. Lösbarkeit ($Ax = b, A \in K^{m \times n}$, schreiben als $\Phi : K^n \to K^m$, $\mathrm{Rang}(A) = \dim(\mathrm{Bild}(\Phi)) \Rightarrow$
$\mathrm{Rang}(A) = m \Leftrightarrow$ surjektiv $\Leftrightarrow$ LGS lösbar für jedes b,
$\mathrm{Rang}(A) = n \Leftrightarrow \mathrm{Kern}(\Phi) = \{0\} \Leftrightarrow$ injektiv $\Leftrightarrow$ jede Lösung ist eindeutig)

Homomorphiesatz und Faktorraum

Basen als maximal linear unabhängige Teilmengen bzw. minimale Erzeugendensysteme

Eigenwerte, -vektoren und -räume

Determinante

3 Die symmetrische Gruppe

Wiederholung. $(G, \cdot)$ heißt Gruppe $:\Leftrightarrow$

(i) $\cdot : G \times G \to G$ ist eine assoziative Verknüpfung

(ii) $\exists e_G \in G : \forall x \in G : e_G \cdot x = x = x \cdot e_G$ (neutrales Element)

(iii) $\forall x \in G : \exists y \in G : x \cdot y = e_G = y \cdot x$ (alle Elemente invertierbar)

Die Ordnung einer Gruppe ist die Anzahl Elemente; die Ordnung $\operatorname{ord}(x)$ eines Elements ist Ordnung der von x erzeugten Untergruppe $\langle x \rangle$, also das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = e_G$.

Satz von Lagrange: Ordnung jeder Untergruppe teilt Ordnung der Gruppe.

Definition. Sei M eine Menge. Dann heißt die Gruppe

$$(\{\sigma \in Abb(M, M) \mid \sigma \text{ bijektiv}\}, \circ)$$

symmetrische Gruppe S_M von M.

Für $M = \{1, \dots, n\}$ setzt man auch $S_n := S_M$.

Korollar. (1) Neutrales Element ist $\mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}} =: \mathrm{id}$.

(2) $\#S_M = \#M!$, insbesondere $\#S_n = n!$.

Definition. Jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich durch seine Wertetabelle darstellen. Wir schreiben:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

(analog für beliebige endliche M).

Definition. Sei $S := \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\#S = k$. Eine Permutation σ definiert durch:

$$\begin{aligned} \sigma(a_i) &= a_{i+1} \quad (i < k) \\ \sigma(a_k) &= a_1 \\ \sigma(n) &= n \quad (n \notin S) \end{aligned}$$

heißt Zykel der Länge k. Wir schreiben dann auch $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$.

Falls $k = 2$, dann heißt $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ Transposition.

Satz. (1) Jede Permutation lässt sich als Produkt disjunkter Zykeln darstellen (eindeutig bis auf die Reihenfolge).

(2) Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen darstellen (*nicht* eindeutig).

Aufgabe 1. Schreiben Sie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 9 & 4 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in S_9$ als Produkt disjunkter Zykel sowie als Produkt von Transpositionen.

Lösung.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Wie schreibt man Zykel als Transpositionen?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \circ \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \circ \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

oder

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \circ \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \circ \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Korollar. (1) S_n wird von den Transpositionen erzeugt.

(2) Jeder Gruppenhomomorphismus $\Phi : S_n \to G$ ist durch die Bilder der Transpositionen eindeutig bestimmt.

Aufgabe 2. Sei G eine endliche Gruppe ungerader Ordnung. Zeigen Sie: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist der einzige Homomorphismus von S_m nach G der triviale.

Beweis. Erinnerung: Der triviale Homomorphismus ist $\Phi : S_m \to G, x \mapsto e_G$.

Nach dem Korollar genügt es zu zeigen, dass jede Transposition auf e_G abgebildet wird. Sei also $\tau \in S_m$ eine Transposition. *Annahme*: $\Phi(\tau) = x \neq e_G$. Es folgt:

$$e_G = \Phi(\mathrm{id}) = \Phi(\tau \circ \tau) = \Phi(\tau) \cdot \Phi(\tau) = x^2$$

Es gilt also $\mathrm{ord}(x) = 2$, also nach Lagrange $2 \mid \#G$. Widerspruch! $\square$

Aufgabe 3. Finden Sie alle Elemente von S_3.

Lösung. Es gibt nach der Bemerkung oben $3! = 6$ Stück. Also besteht S_3 aus den 6 Elementen:

$$\begin{aligned}&\mathrm{id},\\ &\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix},\\ &\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

denn diese liegen in S_3 und sind paarweise verschieden.

Definition. Die Abbildung:

$$\mathrm{sign}: \begin{cases} S_n \to \{1, -1\} \\ \sigma \mapsto \prod\limits_{1 \le i < j \le n} \dfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \end{cases}$$

heißt Signum.

Satz. (1) sign ist wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus zwischen S_n und $(\{1, -1\}, \cdot)$.

(2) Für jede Transposition $\tau \in S_n$ gilt: $\mathrm{sign}(\tau) = -1$.

Korollar. (1) Das Signum einer Permutation σ, die sich als Produkt von k Transpositionen schreiben lässt, ergibt sich als $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^k$.

(2) Die Anzahl Transpositionen ist in jeder Transpositionsdarstellung einer Permutation gerade oder ungerade.

Beweis. Sei $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ eine Transpositionsdarstellung. Dann gilt:

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \mathrm{sign}(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k) = \mathrm{sign}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{sign}(\tau_k) = (-1)^k$$

was (1) zeigt.

Also gilt für je zwei Darstellungen mit k bzw. l Transpositionen:

$$(-1)^k = (-1)^l$$

was (2) zeigt. $\square$

Beispiel. In Aufgabe 1 gilt: $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^6 = 1$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{F}_{11}$ die Multiplikation mit $\bar{2}$ eine Permutation ist (also dass $\sigma : \mathbb{F}_{11} \to \mathbb{F}_{11}, n \mapsto \bar{2}n \in S_{\mathbb{F}_{11}}$). Schreiben Sie σ als Produkt von Transpositionen.

Lösung. $\mathbb{F}_{11}$ ist Körper, also liegt $\bar{2}^{-1} = \bar{6}$ in $\mathbb{F}_{11}$ und σ ist bijektiv mit $\sigma^{-1} : n \mapsto \bar{6}n$. Also gilt $\sigma \in S_{\mathbb{F}_{11}}$.
Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{6} & \bar{7} & \bar{8} & \bar{9} & \bar{10} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{6} & \bar{8} & \bar{10} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{7} & \bar{9} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{8} & \bar{5} & \bar{10} & \bar{9} & \bar{7} & \bar{3} & \bar{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{6} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{7} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{9} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{10} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{8} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(Hier fehlt noch $0 \mapsto 0$ in der Wertetabelle, aber LaTeX ist zu doof.)

4 Determinanten

Wiederholung. Die Determinante $\det$ einer Matrix ist linear in jeder Zeile und Spalte. Es gilt:

(i) $\det(I) = 1$

(ii) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(iii) $\det(A) = \det(A^T)$

(iv) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in GL_n(K)$

Berechnung einer Determinante via Gauß-Algorithmus, Laplace-Entwicklung und Formel für 2×2-Matrizen:

(i) $\det(A \cdot A_{i,j}(\alpha)) = \det(A)$

(ii) $\det(A \cdot V_{i,j}) = -\det(A) \quad (i \neq j)$

(iii) $\det(A \cdot diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \prod_i \alpha_i \cdot \det(A)$

(iv) Laplace-Entwicklung nach der i-ten Zeile bzw. j-ten Spalte:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot A_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot A_{i,j}\end{aligned}$$

($A_{i,j}$ bezeichnet die Matrix, die man durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält)

(v) $\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$

Aufgabe 5. Berechnen Sie $\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & c \\ a & a & b \end{pmatrix})$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Lösung.

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & c \\ a & a & b \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & c \\ a & 0 & b \end{pmatrix}) = (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}) = b - 2a$$

Satz (Leibniz-Formel)**.** Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}\end{aligned}$$

Beispiel. Mit der zweiten Variante:

$$
\begin{aligned}
&\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & c \\ a & a & b \end{pmatrix}) \\
&= 1 \cdot 3 \cdot b && \mathrm{id} \\
&- 2 \cdot 1 \cdot b && \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&- a \cdot 3 \cdot 2 && \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&- 1 \cdot a \cdot c && \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&+ 2 \cdot a \cdot 2 && \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&+ a \cdot 1 \cdot c && \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 3b - 2b - 6a - ac + 4a + ac \\
&= b - 2a
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie $det(A) = det(B)$ für $A = \begin{pmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{pmatrix}$.

Beweis. Wiederum Leibnizformel, 2. Variante. Jeder Term von $det(A)$ hat die Form:

$$x^3 \cdot y^2 \cdot z \cdot 1 = x^2 \cdot y \cdot 1 \cdot (xyz)$$

wobei die rechte Seite gerade den Termen von $det(B)$ entspricht (x, y, z paarweise verschieden).

Update: Es ist noch zu begründen, wieso das Signum auch passt. Am besten so wie in der Aufgabe vorher. □

Definition. Sei $A \in K^{n \times n}$. Die durch

$$\alpha_{i,j} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{j,i})$$

definierte Matrix $A^\# \in K^{n \times n}$ heißt die zu A adjunkte Matrix.

Satz. Sei $A \in K^{n \times n}$ mit $det(A) \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & A \cdot A^{\#} = \det(A) \cdot I_n \\ \Rightarrow \quad & A^{-1} = \frac{A^{\#}}{\det(A)} \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die adjunkte Matrix $A^{\#}$ von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung.

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} &= (-1)^2 \cdot \det(A_{1,1}) = 0 \\ \alpha_{1,2} &= (-1)^3 \cdot \det(A_{2,1}) = -2 \\ \alpha_{1,3} &= (-1)^4 \cdot \det(A_{3,1}) = 2 \\ \alpha_{2,1} &= (-1)^3 \cdot \det(A_{1,2}) = -1 \\ \alpha_{2,2} &= (-1)^4 \cdot \det(A_{2,2}) = 1 \\ \alpha_{2,3} &= (-1)^5 \cdot \det(A_{3,2}) = -1 \\ \alpha_{3,1} &= (-1)^4 \cdot \det(A_{1,3}) = 1 \\ \alpha_{3,2} &= (-1)^5 \cdot \det(A_{2,3}) = -1 \\ \alpha_{3,3} &= (-1)^6 \cdot \det(A_{3,3}) = -1 \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Und, wie der Satz voraussagt:

$$A \cdot A^{\#} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot I = det(A) \cdot I$$