Tutorium 10

1 Die Adjungierte Abbildung

Definition. Seien V, W euklidisch (oder unitär) und $\Phi : V \to W$ linear. Eine Abbildung $\Phi^* : W \to V$ mit

$$\langle \Phi(v), w \rangle = \langle v, \Phi^*(w) \rangle \quad \forall v \in V, w \in W$$

heißt zu Φ adjungierte Abbildung.

Bemerkung. Φ^* ist bei Existenz notwendigerweise linear!

Seien $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ ONBen von V bzw. W. Dann gilt:

$$\langle \Phi(b_j), b_i \rangle = \langle b_j, \Phi^*(b_i) \rangle = \overline{\langle \Phi^*(b_i), b_j \rangle}$$

und damit folgt unmittelbar:

Satz. Seien V, W euklidisch (oder unitär) und $\Phi : V \to W$ linear. Dann existiert die adjungierte Abbildung Φ^*, und gegeben ONBen B, C von V bzw. W gilt:

$$D_{CB}(\Phi) = (D_{BC}(\Phi^*))^*$$

mit $A^* := \overline{A^T}$

Korollar. Es gelten:

(i) $\mathrm{Spec}(\Phi^*) = \overline{\mathrm{Spec}(\Phi)}$

(ii) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(iii) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$

(iv) $(AB)^* = B^* A^*$

(und genauso für die Endomorphismen!)

Aufgabe 1. Sei V unitär und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie: Es existieren ϕ, $\psi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\phi^* = \phi$, $\psi^* = -\psi$ und $\Phi = \phi + \psi$.

Lösung. Der übliche Trick tut es:

$$\phi := \frac{1}{2}(\Phi + \Phi^*)$$
$$\psi := \frac{1}{2}(\Phi - \Phi^*)$$

2 Normale Endomorphismen

Definition. Sei V euklidisch (oder unitär). Ein Endomorphismus $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$\Phi\Phi^* = \Phi^*\Phi$$

heißt normaler Endomorphismus. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt normal wenn gilt:

$$AA^* = A^*A$$

Beispiel. Selbstadjungierte Endomorphismen ($\Phi^* = \Phi$), antiselbstadjungierte Endomorphismen ($\Phi^* = -\Phi$) und auch Isometrien ($\Phi^* = \Phi^-1$), denn:

$$\langle \Phi(x), y\rangle = \left\langle \Phi(x), \Phi(\Phi^{-1}(y))\right\rangle = \left\langle x, \Phi^{-1}(y)\right\rangle$$

Lemma. Sei $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann gilt:

U Φ-invarianter UVR $\;\Rightarrow\;$ $U^\perp$ Φ-invarianter UVR

Satz (Spektralsatz)**.** Sei $\dim V < \infty$ und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ normal.

(i) Ist V unitär, so existiert eine ONB aus EVen von Φ.

(ii) Ist V euklidisch, so ist V orthogonale Summe aus ein- oder zweidimensionalen Φ-invarianten UVRen.

Satz (Matrizenform)**.**

(i) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal. Dann existiert eine Matrix $U \in U(n)$ so dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist.

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ normal. Dann existiert eine Matrix $O \in O(n)$ so dass $O^{-1}AO$ folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & & \\ & & & a_1 & -b_1 & & & \\ & & & b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_l & -b_l \\ & & & & & & b_l & a_l \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $b_i \neq 0$, $k + 2l = n$.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(i) Gilt $A^2 = \pm I_n$, so ist A diagonalisierbar, aber i.A. nicht normal.

Beweis. (i) Annullierendes Polynom ist $X^2 - 1$ bzw. $X^2 + 1$, das Minimalpolynom ist also in

$$\{X-1, X+1, (X-1)(X+1)\} \text{ bzw. } \{X-i, X+i, (X-i)(X+i)\}$$

Also hat A Diagonalgestalt oder zwei EWe. Und als Gegenbeispiel findet man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aber:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & * \\ * & * \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\square$

3 Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition. Sei V euklidisch (oder unitär). Ein Endomorphismus $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$\Phi = \Phi^*$$

heißt <u>selbstadjungiert</u>.

Lemma. Sei V euklidisch (oder unitär), $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ und B eine ONB von V. Dann gilt:

$$\Phi \text{ selbstadjungiert} \quad \Leftrightarrow \quad D_{BB}(\Phi) = D_{BB}(\Phi)^*$$

Bemerkung. Sei Φ selbstadjungiert mit EW $\lambda \in \mathbb{C}$ und zugehörigem EV x. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\lambda \langle x, x \rangle = \langle \Phi(x), x \rangle = \langle x, \Phi(x) \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle \\ \Rightarrow \ &\lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Damit hat das charakteristische Polynom von Φ, das über $\mathbb{C}$ ja in Linearfaktoren zerfällt, nur reelle Nullstellen und so zerfällt es auch über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren!

Satz (Spektralsatz)**.** Sei V euklidisch (oder unitär) und $\dim V < \infty$. $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann selbstadjungiert wenn gilt:

es existiert eine ONB aus EVen von Φ und die EWe sind alle reell

Bemerkung. Dieser Satz gilt insbesondere für symmetrische <u>reelle</u> Matrizen (denn diese sind ja die Abbildungsmatrize von selbstadjungierten Endomorphismen).

Außerdem erhalten wir noch ein Positivitätskriterium:

Korollar. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle EWe positiv sind.

Aufgabe 3. Sei $V = C([-1,1],\mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Zeigen Sie, dass $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ definiert durch

$$\Phi(f)(x) := f(-x)$$

eine selbstadjungierte Isometrie ist.

Beweis. Es gelten:

$$\langle \Phi(f), g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(-x)\overline{g(x)}dx = -\int\limits_{1}^{-1} f(y)\overline{g(-y)}dy = \int\limits_{-1}^{1} f(y)\overline{g(-y)}dy = \langle f, \Phi(g)\rangle$$

bzw.

$$\langle \Phi(f), \Phi(g)\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(-x)\overline{g(-x)}dx = -\int\limits_{1}^{-1} f(y)\overline{g(y)}dy = \int\limits_{-1}^{1} f(y)\overline{g(y)}dy = \langle f, g\rangle$$

□

Aufgabe 4. Sei V euklidisch (oder unitär), $\dim V = n$ und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert und nilpotent. Zeigen Sie: $\Phi = 0$.

Beweis. Φ selbstadjungiert $\Rightarrow \exists$ ONB B mit $D_{BB}(\Phi) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Φ nilpotent $\Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{N}$ mit $0 = D_{BB}(\Phi)^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$.

Also $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ und somit $\Phi = 0$. □