

Tutorium 10

1 Die Adjungierte Abbildung

Definition. Seien V, W euklidisch (oder unitär) und $\Phi : V \rightarrow W$ linear. Eine Abbildung $\Phi^* : W \rightarrow V$ mit

$$\langle \Phi(v), w \rangle = \langle v, \Phi^*(w) \rangle \quad \forall v \in V, w \in W$$

heißt zu Φ adjungierte Abbildung.

Bemerkung. Φ^* ist bei Existenz notwendigerweise linear!

Seien $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ ONBen von V bzw. W . Dann gilt:

$$\langle \Phi(b_j), b_i \rangle = \langle b_j, \Phi^*(b_i) \rangle = \overline{\langle \Phi^*(b_i), b_j \rangle}$$

und damit folgt unmittelbar:

Satz. Seien V, W euklidisch (oder unitär) und $\Phi : V \rightarrow W$ linear. Dann existiert die adjungierte Abbildung Φ^* , und gegebenen ONBen B, C von V bzw. W gilt:

$$D_{CB}(\Phi) = (D_{BC}(\Phi^*))^*$$

mit $A^* := \overline{A^T}$

Korollar. Es gelten:

(i) $\text{Spec}(\Phi^*) = \overline{\text{Spec}(\Phi)}$

(ii) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(iii) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$

(iv) $(AB)^* = B^* A^*$

(und genauso für die Endomorphismen!)

Aufgabe 1. Sei V unitär und $\Phi \in \text{End}(V)$. Zeigen Sie: Es existieren $\phi, \psi \in \text{End}(V)$ mit $\phi^* = \phi$, $\psi^* = -\psi$ und $\Phi = \phi + \psi$.

Lösung. Der übliche Trick tut es:

$$\phi := \frac{1}{2} (\Phi + \Phi^*)$$

$$\psi := \frac{1}{2} (\Phi - \Phi^*)$$

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie:

(i) Gilt $A^2 = \pm I_n$, so ist A diagonalisierbar, aber i.A. nicht normal.

Beweis. (i) Annullierendes Polynom ist X^2-1 bzw. X^2+1 , das Minimalpolynom ist also in

$$\{X-1, X+1, (X-1)(X+1)\} \text{ bzw. } \{X-i, X+i, (X-i)(X+i)\}$$

Also hat A Diagonalgestalt oder zwei EWe. Und als Gegenbeispiel findet man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aber:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & * \\ * & * \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

3 Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition. Sei V euklidisch (oder unitär). Ein Endomorphismus $\Phi \in \text{End}(V)$ mit

$$\Phi = \Phi^*$$

heißt selbstadjungiert.

Lemma. Sei V euklidisch (oder unitär), $\Phi \in \text{End}(V)$ und B eine ONB von V . Dann gilt:

$$\Phi \text{ selbstadjungiert} \Leftrightarrow D_{BB}(\Phi) = D_{BB}(\Phi)^*$$

Bemerkung. Sei Φ selbstadjungiert mit EW $\lambda \in \mathbb{C}$ und zugehörigem EV x . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \langle x, x \rangle &= \langle \Phi(x), x \rangle = \langle x, \Phi(x) \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle \\ \Rightarrow \lambda &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Damit hat das charakteristische Polynom von Φ , das über \mathbb{C} ja in Linearfaktoren zerfällt, nur reelle Nullstellen und so zerfällt es auch über \mathbb{R} in Linearfaktoren!

Satz (Spektralsatz). Sei V euklidisch (oder unitär) und $\dim V < \infty$. $\Phi \in \text{End}(V)$ ist genau dann selbstadjungiert wenn gilt:

es existiert eine ONB aus EVen von Φ und die EWe sind alle reell

Bemerkung. Dieser Satz gilt insbesondere für symmetrische reelle Matrizen (denn diese sind ja die Abbildungsmatrize von selbstadjungierten Endomorphismen).

Außerdem erhalten wir noch ein Positivitätskriterium:

Korollar. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle EWe positiv sind.

Aufgabe 3. Sei $V = C([-1, 1], \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

Zeigen Sie, dass $\Phi \in \text{End}(V)$ definiert durch

$$\Phi(f)(x) := f(-x)$$

eine selbstadjungierte Isometrie ist.

Beweis. Es gelten:

$$\langle \Phi(f), g \rangle = \int_{-1}^1 f(-x) \overline{g(x)} dx = - \int_1^{-1} f(y) \overline{g(-y)} dy = \int_{-1}^1 f(y) \overline{g(-y)} dy = \langle f, \Phi(g) \rangle$$

bzw.

$$\langle \Phi(f), \Phi(g) \rangle = \int_{-1}^1 f(-x) \overline{g(-x)} dx = - \int_1^{-1} f(y) \overline{g(y)} dy = \int_{-1}^1 f(y) \overline{g(y)} dy = \langle f, g \rangle$$

□

Aufgabe 4. Sei V euklidisch (oder unitär), $\dim V = n$ und $\Phi \in \text{End}(V)$ selbstadjungiert und nilpotent. Zeigen Sie: $\Phi = 0$.

Beweis. Φ selbstadjungiert $\Rightarrow \exists$ ONB B mit $D_{BB}(\Phi) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Φ nilpotent $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ mit $0 = D_{BB}(\Phi)^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

Also $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ und somit $\Phi = 0$.

□