

# Tutorium 11

## 1 Quaternionen

**Definition.** Ein Ring heißt Schiefkörper, wenn jedes Nichtnullelement invertierbar ist.

Ein kommutativer Schiefkörper heißt Körper.

**Definition und Satz.**

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

bildet mit der üblichen Addition und Multiplikation im Matrizenring einen Schiefkörper, die sog. Quaternionen.

**Definition und Satz.** In Analogie zu  $\mathbb{C}$  setzt man:

$$1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{I} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbb{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{K} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\mathbb{H} = \{ \alpha 1 + \beta \mathbb{I} + \gamma \mathbb{J} + \delta \mathbb{K} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \}$$

Wir können  $\mathbb{H}$  also als 4-dimensionalen reellen Vektorraum auffassen.

**Bemerkung.** Meist lässt man den Basisvektor 1 weg und schreibt einfach

$$q = \alpha + \beta \mathbb{I} + \gamma \mathbb{J} + \delta \mathbb{K}$$

Man nennt  $\alpha$  den Realteil  $\operatorname{Re}(q)$ . Die Menge

$$W := \{ q \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re}(q) = 0 \}$$

ist ein UVR von  $\mathbb{H}$ , ihre Elemente heißen reine Quaternionen.

**Satz.** Das Produkt zweier Quaternionen ergibt sich dann durch formales "Ausmultiplizieren" unter Benutzung der Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\mathbb{J} &= \mathbb{K} = -\mathbb{J}\mathbb{I}, & \mathbb{J}\mathbb{K} &= \mathbb{I} = -\mathbb{K}\mathbb{J}, & \mathbb{K}\mathbb{I} &= \mathbb{J} = -\mathbb{I}\mathbb{K}, \\ \mathbb{I}^2 &= \mathbb{J}^2 = \mathbb{K}^2 = -1 \end{aligned}$$

Analog zu  $\mathbb{C}$  gilt:

$$(\alpha + \beta \mathbb{I} + \gamma \mathbb{J} + \delta \mathbb{K})^* = \alpha - \beta \mathbb{I} - \gamma \mathbb{J} - \delta \mathbb{K}$$

Daher nennt man  $q^*$  auch das zu  $q$  konjugierte Quaternion.

**Beispiel.**

$$\begin{aligned}
& (2 + 3\mathbb{I} + 5\mathbb{K})(3 + 2\mathbb{J} + \mathbb{K}) \\
&= 6 + 4\mathbb{J} + 2\mathbb{K} + 3\mathbb{I}3 + 3\mathbb{I}2\mathbb{J} + 3\mathbb{I}\mathbb{K} + 5\mathbb{K}3 + 5\mathbb{K}2\mathbb{J} + 5\mathbb{K}\mathbb{K} \\
&= 6 + 4\mathbb{J} + 2\mathbb{K} + 9\mathbb{I} + 6\mathbb{K} - 3\mathbb{J} + 15\mathbb{K} - 10\mathbb{I} - 5 \\
&= 1 - \mathbb{I} + \mathbb{J} + 23\mathbb{K}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie

- (i) Multiplikation  $q_1 q_2$
- (ii) äußeres Grassmann-Produkt  $\frac{1}{2} (q_1 q_2 - q_2 q_1)$
- (iii) inneres euklidisches Produkt  $\frac{1}{2} (q_1^* q_2 + q_2^* q_1)$
- (iv)  $\operatorname{Re}(q_1^* q_2)$  sowie  $\operatorname{Re}(q_1 q_2^*)$ .
- (v)  $q^{-1}$  für  $q \neq 0$ .

und drücken Sie die Ergebnisse mit Hilfe von  $\mathbb{R}^3$ -Kreuz- und Skalarprodukt aus.  
Hinweis:  $\mathbb{H} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ .

*Lösung.* Sei  $q_1 = \alpha_1 + \beta_1\mathbb{I} + \gamma_1\mathbb{J} + \delta_1\mathbb{K}$ ,  $q_2 = \alpha_2 + \beta_2\mathbb{I} + \gamma_2\mathbb{J} + \delta_2\mathbb{K}$ ,  $q = \alpha + \beta\mathbb{I} + \gamma\mathbb{J} + \delta\mathbb{K}$ .

(i)

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 &= (\alpha_1 + \beta_1\mathbb{I} + \gamma_1\mathbb{J} + \delta_1\mathbb{K})(\alpha_2 + \beta_2\mathbb{I} + \gamma_2\mathbb{J} + \delta_2\mathbb{K}) \\
&= \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 - \delta_1\delta_2 \\
&\quad + (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2)\mathbb{I} \\
&\quad + (\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2 + \delta_1\beta_2 - \beta_1\delta_2)\mathbb{J} \\
&\quad + (\delta_1\alpha_2 + \alpha_1\delta_2 + \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)\mathbb{K}
\end{aligned}$$

Wegen des VR-Isomorphismus

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \alpha + \beta\mathbb{I} + \gamma\mathbb{J} + \delta\mathbb{K} \mapsto \left( \alpha, \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \right)$$

macht es Sinn,  $q$  mit  $\Phi(q)$  zu identifizieren und zu schreiben:

$$(\alpha_1, v_1)(\alpha_2, v_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \langle v_1, v_2 \rangle, \alpha_2 v_1 + \alpha_1 v_2 + v_1 \times v_2)$$

Aha, in der Multiplikation sind Skalar- und Kreuzprodukt "versteckt"!

- (ii) Nach (i) ist das Produkt bis auf das Kreuzprodukt symmetrisch, folglich:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (q_1 q_2 - q_2 q_1) \\
&= \frac{1}{2} ((\alpha_1, v_1)(\alpha_2, v_2) - (\alpha_2, v_2)(\alpha_1, v_1)) \\
&= \frac{1}{2} (0, v_1 \times v_2 - v_2 \times v_1) \\
&= (0, v_1 \times v_2)
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (q_1^* q_2 + q_2^* q_1) \\
&= \frac{1}{2} ((\alpha_1, -v_1)(\alpha_2, v_2) + (\alpha_2, -v_2)(\alpha_1, v_1)) \\
&= \frac{1}{2} (2\alpha_1\alpha_2 + 2\langle v_1, v_2 \rangle, 0) \\
&= (\alpha_1\alpha_2 + \langle v_1, v_2 \rangle, 0) \\
&= \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2
\end{aligned}$$

(iv)

$$\operatorname{Re}(q_1^* q_2) = \operatorname{Re}((\alpha_1, -v_1)(\alpha_2, v_2)) = \operatorname{Re}(\alpha_1 \alpha_2 + \langle v_1, v_2 \rangle, \dots) = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2$$

und analog für  $q_1 q_2^*$ . Im Gegensatz zu (iii) ist der "Imaginärteil" dieser Produkte i.A. nicht 0!

(v) Aber für  $q_1 = q_2 = q$  ist der Imaginärteil null, denn:

$$\begin{aligned} qq^* &= (\alpha, v)(\alpha, -v) = (\alpha^2 + \langle v, v \rangle, -\alpha v + \alpha v - v \times v) \\ &= (\alpha^2 + \langle v, v \rangle, 0) \\ &= (\alpha, -v)(\alpha, v) = (\alpha^2 + \langle v, v \rangle, \alpha v - \alpha v - v \times v) = q^* q \end{aligned}$$

Aber daran sieht man auch:

$$q \neq 0 \Rightarrow qq^* = q^* q \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow q^{-1} = \frac{q^*}{qq^*}$$

**Satz.**

$$\langle q_1, q_2 \rangle := \operatorname{Re}(q_1^* q_2) = \frac{1}{2} (q_1^* q_2 + q_2^* q_1) = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2$$

definiert ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{H}$ . Offenbar bilden die  $\{1, \mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}\}$  dann eine ONB.

Die induzierte Norm  $\|\cdot\|$  ist multiplikativ, d.h. es gilt:

$$\|q_1 q_2\| = \|q_1\| \cdot \|q_2\|$$

**Definition.**

$$\mathbb{H}_1 := \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$$

heißt Gruppe der Einheitsquaternionen.

## 2 Quaternionen und Drehungen

**Satz.** Für jedes  $q \in \mathbb{H}_1$  hat man eine Abbildung (“Konjugation mit  $q$ ”)

$$\Phi_q : W \rightarrow W, w \mapsto qwq^{-1}$$

**Bemerkung.** Wegen der Multiplikativität der Norm ist  $\Phi_q$  eine lineare Isometrie. Es lässt sich auch zeigen, dass sie Determinante 1 hat. Und da  $W \cong \mathbb{R}^3$  so können wir  $\Phi_q$  als Element von  $SO(3)$ , also als *Drehung* ansehen!

Schreiben wir  $\mathbb{H}_1 \ni q = \cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2})v$  mit einem reinen Einheitsquaternion  $v \in W \cap H_1$ , so ist  $\Phi_q$  eine Drehung um  $v$  (als Vektor im  $\mathbb{R}^3$  interpretiert) mit Drehwinkel  $\alpha$ .

**Aufgabe 2.** Stellen Sie die Drehung um  $\frac{\pi}{2}$  um die x- bzw. y-Achse mit Hilfe von Quaternionen dar, und untersuchen Sie, welcher Drehung das Produkt entspricht.

*Lösung.*

$$q_1 := \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbb{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{I}$$

$$q_2 := \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbb{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{J}$$

$$q := q_1 q_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{I}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{J}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{2}\mathbb{K}$$

Die Drehung um 45 Grad zuerst um y und dann um x entspricht also einer Drehung mit Drehwinkel  $2 \arccos(0.5) = \frac{2\pi}{3}$  (120 Grad) um die  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ -Achse.

**Bemerkung.** Es gilt  $\mathbb{H}_1 = SU(2)$ , und damit ergibt sich fast direkt der folgende Satz:

**Satz.**

$$\Phi : \mathbb{H}_1 \rightarrow SO(3), q \mapsto \Phi_q$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern  $\{\pm 1\}$ . Also gilt:

$$SU(2)/\{\pm 1\} \cong SO(3)$$

### 3 Die Quaternionengruppe

**Definition und Satz.** Die Menge

$$Q := \{\pm 1, \pm \mathbb{I}, \pm \mathbb{J}, \pm \mathbb{K}\}$$

bildet eine Gruppe, die sog. Quaternionengruppe.

**Aufgabe 3.** Bestimmen Sie alle Untergruppen der Quaternionengruppe.

*Lösung.* Sei  $U \leq Q$ . Fallunterscheidung:

- (a)  $U = \{1\}$
- (b)  $\mathbb{I} \in U$ :  $\mathbb{I}^2 = -1 \in U$ 
  - (i)  $\mathbb{J}$  oder  $\mathbb{K}$  in  $U$ :  $U = Q$
  - (ii) sonst:  $U = \{\pm 1, \pm \mathbb{I}\} = \langle \mathbb{I} \rangle$
- (c)  $\mathbb{J}, \mathbb{K}, -\mathbb{I}, -\mathbb{J}$  oder  $-\mathbb{K}$  in  $U$ : siehe (b)
- (d) sonst:  $U = \{\pm 1\} = \langle -1 \rangle$

Also:

$$\mathcal{U}(Q) = \{\{1\}, \langle -1 \rangle, \langle \mathbb{I} \rangle, \langle \mathbb{J} \rangle, \langle \mathbb{K} \rangle, Q\}$$

Das ist interessant: Alle echten Untergruppen sind abelsch (da zyklisch), aber  $Q$  ist es nicht!