# Tutorium 12

## 1 Affine Räume

**Definition.** Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $V$ ein Vektorraum und $\tau : V \times A \to A$ mit

(i) $\tau(0, P) = P$

(ii) $\tau(w, \tau(v, P)) = \tau(w + v, P) \qquad \forall P \in A, w, v \in V$

(iii) zu $P, Q \in A$ existiert *genau* ein $v \in V$ mit $\tau(v, P) = Q$

Dann heißt $(A, V, \tau)$ affiner Raum.

Ist $\dim V = n$, so heißt $n$ auch Dimension $\dim A$ des affinen Raums.

**Notation.** Meist spricht man einfach von dem affinen Raum $A$, lässt $\mathcal{U}_A$ den zugehörigen Vektorraum bezeichnen und schreibt

$$v + P := \tau(v, P)$$

Damit lauten die Axiome (i) bis (iii) ganz intuitiv:

(i) $0 + P = P \qquad \forall P \in A$

(ii) $w + (v + P) = (w + v) + P \qquad \forall P \in A, w, v \in V$

(iii) zu $P, Q \in A$ existiert *genau* ein $v \in V$ mit $v + P = Q$

Dieser Vektor $v$, der von $P$ nach $Q$ weist, bezeichnet man mit $\overrightarrow{PQ}$, und erhält so:

$$\overrightarrow{PQ} + P = Q$$

**Beispiel.** Jeder Vektorraum $V$ lässt sich als affinen Raum $(V, V, +)$ auffassen (selbe Addition wie im Vektorraum).

Insbesondere erhält man so den affinen Standardraum $\mathbb{A}^n(\mathbb{K}) := (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, +)$.

Die Gefahr, Punkte $P \in A$ und Vektoren $v \in V$ zu verwechseln, verringert sich mit dem modifizierten Modell $\tilde{\mathbb{A}}^n := (\tilde{\mathbb{A}}^n, \tilde{\mathbb{K}}^n, +)$ mit

$$\tilde{\mathbb{A}}^n := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{K}^{n+1}, \qquad \tilde{\mathbb{K}}^n := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$$

Sinn der Unterscheidung von Punkten und Vektoren (Richtungen, beziehen sich immer auf einen Referenzpunkt!) wird sich später noch genauer erschließen, ist aber schon ersichtlich wenn man sich eine Ebene ohne ausgezeichneten Ursprung vorstellt (oder versucht, seine beiden Hände zu addieren…).

**Aufgabe 1.** Welche der folgenden Tripel sind affine Räume?

(i) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \oplus)$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus P := x_1 + P$

(ii) $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2, \oplus)$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

(iii) $(\mathbb{R}^n \times \{1\}, \mathbb{R}^n, \ominus)$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} p_1 \\ \cdots \\ p_n \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p_1 - x_1 \\ \cdots \\ p_n - x_n \\ 1 \end{pmatrix}$

*Lösung.* Zu (i):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0$$

Widerspruch zur Eindeutigkeit des Verbindungsvektors ("genau ein").

Zu (ii):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Widerspruch zur Existenz des Verbindungsvektors.

Zu (iii): Wir schreiben die "Addition zunächst" als

$$v \ominus \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit sind offenbar Axiome (i) und (iii) erfüllt. Zu (ii):

$$(w + v) \ominus \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - (w + v) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - v - w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p - v) - w \\ 1 \end{pmatrix} = w \ominus \begin{pmatrix} p - v \\ 1 \end{pmatrix} = w \ominus (v \ominus \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix})$$

Also handelt es sich tatsächlich um einen affinen Raum.

**Bemerkung.** Sei $(A, V, +)$ ein affiner Raum und $P \in A$ fest. Dann ist wegen Axiom (iii)

$$\Phi : V \to A, v \mapsto v + P$$

eine Bijektion zwischen $V$ und $A$. In gewisser Weise ist ein affiner Raum also ein Vektorraum, der seinen Ursprung "vergessen" hat. Deshalb kann man Punkte im affinen Raum nicht skalieren oder addieren!

Wieso ist die Struktur eines affinen Raumes dann überhaupt interessant? Zum Beispiel, weil wir früher schon gemerkt haben, dass UVRe nicht die einzigen interessanten Teilmengen eines Vektorraums sind, sondern wir an Teilmengen der Form $U + v$ interessiert waren (Abstandsberechnung, Lösungsmenge von LGSen, ...). Der affine Unterraum formalisiert dieses Konzept:

**Definition.** Sei $(A, V, +)$ ein affiner Raum. Eine Menge $B \subseteq A$ heißt affiner Unterraum $:\Leftrightarrow$

$$\exists U \leq V,\ P \in B : \qquad B = U + P$$

**Bemerkung.** Ein affiner Unterraum ist selbst wieder ein affiner Raum!

Der Punkt $P$ ist nicht ausgezeichnet, er kann in $B$ beliebig gewählt werden denn:

$$\begin{aligned} & Q = u + P \quad , u \in U \\ \Rightarrow\ & U + Q = U + u + P = U + P \end{aligned}$$

**Beispiel.** (1)

Abbildung 1: Gerade im $\mathbb{R}^2$

Hier sieht man schön wie beliebig der “Fußpunkt” ist.

(2) Der Lösungsraum $\mathcal{L}$ eines LGS $Ax = b$ ist entweder leer oder hat die Form

$$\mathcal{L} = x + U$$

für eine spezielle Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ und einen UVR $U \leq \mathbb{R}^n$, bildet also einen affinen Unterraum des $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$.

**Bemerkung.** Der Durchschnitt zweier affiner Teilräume ist entweder leer oder wieder ein affiner Teilraum. Deshalb macht die folgende Definition Sinn:

**Definition.** Sei $(A, V, +)$ ein affiner Raum und $\emptyset \neq M \subseteq A$. Dann heißt

$$[M] := \bigcap_{B \text{ affiner Unterraum von } A,\ M \subseteq B} B$$

<u>affine Hülle</u> von $M$. Insbesondere heißt

$$PQ := [\{P, Q\}] = \{P + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

<u>Gerade</u> durch $P$ und $Q$.

**Aufgabe 2.** Sei

$$\mathcal{L} := \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda b \mid \lambda \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^3, b \text{ nicht orthogonal zur } z\text{-Achse}\}$$

eine Menge von affinen Geraden im $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: Es gibt Bijektionen zwischen:

(i) $\mathcal{L}$ und der $xy$-Ebene

(ii) Der Einheitssphäre $\mathcal{S}^2$ ohne Nordpol und $\mathbb{R}^2$

(iii) $\mathcal{S}^2$ und $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$

*Beweis.* Bezeichne $N := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ den Nordpol, und $E := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ die $xy$-Ebene.

Zu (i): Wir bilden eine Gerade auf ihren Schnittpunkt mit der $xy$-Ebene ab, also:

$$\Phi : \mathcal{L} \to E,\ (N + \lambda b) \mapsto P \quad \text{mit} \quad \{P\} = (N + \lambda b) \cap E$$

Das ist nach Voraussetzung wohldefiniert und eine Bijektion.

Zu (ii): Die Abbildungen

$$\Psi : \mathcal{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathcal{L},\ P \mapsto NP$$

$$P : E \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sind Bijektionen, also tut es $P \circ \Phi \circ \Psi$.

Zu (iii): Klar, wir bilden den Nordpol einfach auf $\infty$ ab, und verfahren sonst wie in (ii). $\square$

**Definition.** Sei $(A, V, +)$ ein affiner Raum. $m+1$ Punkte $P_0, \ldots, \mathcal{P}_m \in A$ heißen in allgemeiner Lage (oder affin unabhängig), falls gilt:

$$\dim [\{P_0, \ldots, P_m\}] = m$$

**Beispiel.** Die lineare Hülle dreier Punkte in allgemeiner Lage ist eine Ebene. Die lineare Hülle von $\dim V$ Punkten in allgemeiner Lage ist eine Hyperebene. Die lineare Hülle von $\dim V + 1$ Punkten in allgemeiner Lage ist der gesamte Raum.

**Definition.** Zwei affine Unterräume $B, C$ heißen parallel wenn gilt

$$\mathcal{U}_B \leq \mathcal{U}_C \quad \text{oder} \quad \mathcal{U}_C \leq \mathcal{U}_B$$

Man schreibt dann: $B \mid\mid C$.

**Bemerkung.** (1) Wir fordern keine Gleichheit der UVRe, daher kann z.B. auch eine Gerade zu einer Ebene parallel sein.

(2) Aus $B \parallel C$ folgt:

$$B \cap C = \emptyset \quad \text{oder} \quad B \subseteq C \quad \text{oder} \quad C \subseteq B$$

**Satz** ("Parallelenaxiom"). Sei $(A, V, +)$ ein affiner Raum. Zu jedem affinen Unterraum $B \subseteq A$ und $P \in A$ existiert genau ein affiner Unterraum $B_P$ mit

$$B_P \parallel B \quad \text{und} \quad \dim B = \dim B_P \quad \text{und} \quad P \in B_P$$

**Satz.** Sei $(A, V, +)$ ein affiner Raum der Charakteristik ungleich 2, und $B \subseteq A$. Dann gilt:

$$B \text{ affiner Unterraum} \quad \Leftrightarrow \quad P, Q \in B \;\Rightarrow\; PQ \subseteq B$$

**Aufgabe 3.** Seien $A, B, C, D$ Punkte, von denen je drei nicht auf einer Geraden liegen, in einem affinen Raum über einem Körper mit Charakteristik ungleich 2. Zeigen Sie: Das "Viereck" ABCD ist genau dann ein Parallelogramm, wenn die Diagonalenmittelpunkte übereinstimmen, also:

$$A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \quad \Leftrightarrow \quad AB \parallel CD \text{ und } AD \parallel BC$$

*Beweis.* $\underline{(\Rightarrow)}$: Es gilt:

$$\begin{aligned}
A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} &= C + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = C - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} &= D + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = D.\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
&A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \quad \Leftrightarrow \quad A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = B \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \\
&C - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = D - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \quad \Leftrightarrow \quad C = D + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\
\Rightarrow \quad &\left\langle \overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{CD} \right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad AB \parallel CD
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = D + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \quad \Leftrightarrow \quad A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = D \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} \\
&C - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = B - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \quad \Leftrightarrow \quad C = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\
\Rightarrow \quad &\left\langle \overrightarrow{AD} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{BC} \right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad AD \parallel BC
\end{aligned}$$

$\underline{(\Leftarrow)}$: Gegeben ist

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \lambda\overrightarrow{CD} \\
\overrightarrow{AD} &= \mu\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

Wir zeigen $\lambda = -1$, $\mu = 1$:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \\
\Rightarrow\ &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \\
\Rightarrow\ &(\lambda + 1)\overrightarrow{CD} = (\mu - 1)\overrightarrow{BC} \\
\Rightarrow\ &\lambda = -1, \mu = 1 \quad \text{da } \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{CB} \text{ l.u. (hier müsste man eigtl. genauer argumentieren)}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$$

was nach der Äquivalenzenkette in der Hinrichtung die Behauptung zeigt. $\square$

## 2 Affine Abbildungen

**Definition und Satz.** Seien $A$, $B$ affine Räume und $\Phi : A \to B$. Dann induziert $\Phi$ für jedes festes $P \in A$ eine Abbildung

$$\varphi_P : \mathcal{U}_A \to \mathcal{U}_B, \overrightarrow{PQ} \mapsto \overrightarrow{\Phi(P)\Phi(Q)}$$

und $\Phi$ heißt <u>affin</u>, falls $\varphi_P$ linear ist für ein $P \in A$. Ist $\Phi$ sogar bijektiv, dann heißt sie <u>Affinität</u>.

**Bemerkung.** (1) Es gilt:

$$\varphi_P \text{ linear für ein } P \in A \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_P \text{ linear für jedes } P \in A$$

Dabei hängt die lineare Abbildung $\varphi_P$ gar nicht von $P$ ab.

(2) Ist $\Phi$ affin, so gilt:

$$\Phi(v+P) = \overrightarrow{\Phi(P)\Phi(v+P)} + \Phi(P) = \varphi(\overrightarrow{P(v+P)}) + \Phi(P) = \varphi(v) + \Phi(P)$$

Wir können jede affine Abbildung also in eine Translation und einen linearen Anteil zerlegen.

(3) $\Phi$ ist also eine Affinität, genau dann wenn $\varphi$ invertierbar ist.

(4) Im Spezialfall des $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ ist $\Phi$ also genau dann affin, wenn es sich schreiben lässt als:

$$\Phi(x) = Ax + t$$

mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $t \in \mathbb{K}^n$.