

Tutorium 13

1 Quadriken

Definition. Sei $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ von der Form

$$F = \sum_{i \leq j} \tilde{a}_{i,j} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c$$

und

$$Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid F(x) = 0\}$$

Dann heißt (Q, F) Quadrik im \mathbb{K}^n .

Bemerkung (Matrizenform). Falls $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, so lässt sich jede Quadrik auch in der Form

$$F = x^T A x + b^T x + c$$

mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{K}^n$ und $c \in \mathbb{K}$.

Beispiel (\mathbb{R}^2). (1) Kreis mit Radius r und Mittelpunkt m : $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - m\|_2 = r\}$

(2) Standardhyperbel: $\{(\frac{x}{y}) \mid xy = 1\}$

(3) Standardparabel: $\{(\frac{x}{y}) \mid y - x^2 = a\}$

Aufgabe 1. Schreibe die Beispielquadriken in Matrizenform.

Lösung. (1)

$$\begin{aligned} & \|x - m\|_2 = r \\ \Leftrightarrow & \|x - m\|_2^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow & (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 - r^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & x_1^2 + x_2^2 - 2m_1 x_1 - 2m_2 x_2 + m_1^2 + m_2^2 - r^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x_1 \quad x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: I_2 =: A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2m_1 & -2m_2 \end{pmatrix}}_{=: -2m =: b} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{m_1^2 + m_2^2 - r^2}_{=: c} = 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 = 1 \\ \Leftrightarrow & x_1 x_2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x_1 \quad x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \underbrace{- 1}_{=: c} = 0 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} & x_2 - x_1^2 = a \\ \Leftrightarrow & -x_1^2 + x_2 - a = 0 \\ \Leftrightarrow & (x_1 \quad x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: b} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \underbrace{- a}_{=: c} = 0 \end{aligned}$$

Skizze: Klar, bei (2), (3) jeweils nach y bzw. x_2 auflösen.

2 Affine Äquivalenz

Bemerkung (Basiswechsel). Sei (Q, F) eine Quadrik mit

$$F = x^T A x + b^T x + c$$

und $\Phi(x) = Mx + t$ eine Affinität. Dann induziert Φ einen affinen Basiswechsel und in den neuen Koordinaten hat erhält man als "definierendes Polynom":

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x) := F(\Phi(x)) &= (Mx + t)^T A (Mx + t) + b^T (Mx + t) + c \\ &= x^T \underbrace{M^T A M}_{=: \tilde{A}} x + \underbrace{(M^T (2At + b))}_{=: \tilde{b}} x + \underbrace{F(t)}_{=: \tilde{c}} \end{aligned}$$

sowie für die "Quadrikpunkte" \tilde{Q} :

$$\begin{aligned} x \in Q &\Leftrightarrow F(x) = 0 \Leftrightarrow F(\Phi(\Phi^{-1}(x))) = 0 \Leftrightarrow \tilde{F}(\Phi^{-1}(x)) = 0 \Leftrightarrow \Phi^{-1}(x) \in \tilde{Q} \Leftrightarrow x \in \Phi(\tilde{Q}) \\ &\Leftrightarrow Q = \Phi(\tilde{Q}) \Leftrightarrow \tilde{Q} = \Phi^{-1}(Q) \end{aligned}$$

Das führt zur folgenden Definition:

Definition. Die Quadriken (Q, F) und (\tilde{Q}, \tilde{F}) heißen affin äquivalent falls gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= F \circ \Phi \\ \tilde{Q} &= \Phi^{-1}(Q) \end{aligned}$$

für eine Affinität $\Phi \in \text{Aff}(\mathbb{A}^n(\mathbb{K}))$.

Bemerkung. Affine Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und die Quadriken

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{K}} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 = 1 \right\} \\ H_{\mathbb{K}} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 - y^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

gegeben.

- (1) Skizziere $E_{\mathbb{R}}$ und $H_{\mathbb{R}}$.
- (2) Gib eine Affinität an, die $E_{\mathbb{C}}$ in $H_{\mathbb{C}}$ überführt.
- (3) Schneide $E_{\mathbb{C}}$ mit der reellen xy -Ebene sowie der reellen $x(iy)$ -Ebene.

Lösung. (1) Wegen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2-1}$ erhält man:

(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix}$$

(3) Der Schnitt mit der reellen xy -Ebene ist wegen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{\mathbb{R}}$$

ein Kreis.

Der Schnitt mit der reellen $x(iy)$ -Ebene ist wegen

$$\begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix} \in E_{\mathbb{C}} \cap (\mathbb{R} \times i\mathbb{R}) \Leftrightarrow x^2 + (iy)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H_{\mathbb{R}}$$

eine Hyperbel.

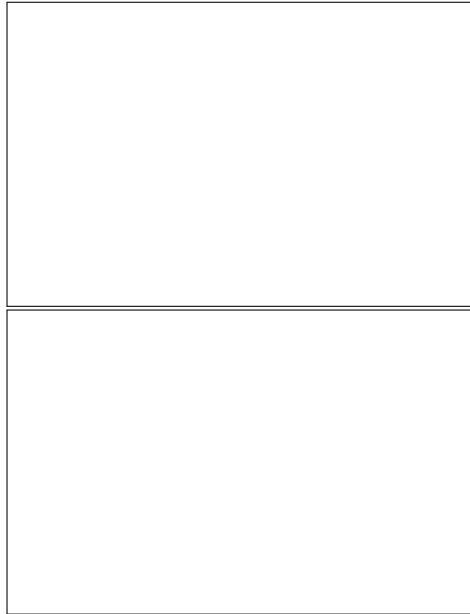


Abbildung 1: $E_{\mathbb{R}}$ (Kreis) bzw. $H_{\mathbb{R}}$ (Hyperbel)

3 Normalformen

Wiederholung. Sei (Q, F) eine Quadrik mit

$$F = x^T A x + b^T x + c$$

und $\Phi(x) = Mx + t$ eine Affinität. Dann gilt:

$$F(\Phi(x)) = x^T \underbrace{M^T A M}_{=: \tilde{A}} x + \underbrace{(M^T (2At + b))}_{=: \tilde{b}}^T x + \underbrace{F(t)}_{=: \tilde{c}}$$

Satz (C-Normalformen). Jede Quadrik (Q, F) ist affin äquivalent zu einer der folgenden Normalformen

- (i) $\sum_{i=1}^r x_i^2 = 0$
- (ii) $\sum_{i=1}^r x_i^2 + 1 = 0$
- (ii) $\sum_{i=1}^r x_i^2 + x_{r+1} = 0$

Beweis. A ist symmetrisch, also orthogonal diagonalisierbar, d.h. es existiert ein $M \in U(n)$ so dass

$$M^T A M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Transformiert man stattdessen mit MD wobei $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ so ergibt sich:

$$(MD)^T A (MD) = \text{diag}(\lambda_1 \mu_1^2, \dots, \lambda_n \mu_n^2)$$

Wir können also erreichen, dass

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Falls $b \in \text{Bild } A$ dann können wir den Translationsterm t so wählen, dass der lineare Term verschwindet, also $\tilde{b} = 0$ und nach evtl. Multiplikation der Gleichung

(und erneutes Skalieren der Basisvektoren so dass A erhalten bleibt) erhalten wir eine der Normalformen (i) oder (ii).

Ansonsten können wir t so wählen, dass der konstante Term verschwindet und ein einziger linearer Term übrigbleibt (siehe Aufgabe 3, da machen wir das am Ende) – also Normalform (iii). \square

Satz (\mathbb{R} -Normalformen). Jede Quadrik (Q, F) ist affin äquivalent zu einer der folgenden Normalformen

$$(i) \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^r x_i^2 = 0$$

$$(ii) \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^r x_i^2 + 1 = 0$$

$$(iii) \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^r x_i^2 + x_{r+1} = 0$$

Beweis. Ganz analog, nur können wir hier höchstens

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erreichen! \square

Definition. Eine Quadrik heißt Mittelpunktsquadrik, falls die Normalform keinen linearen Term enthält.

Bemerkung. Grund: Für eine Mittelpunktsquadrik in Normalform gilt $x \in Q \Rightarrow -x \in Q$.

Aufgabe 3. Sei $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Gerade im euklidischen Raum \mathbb{R}^3 . Bestimme die affine Normalform von

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x, 0) = d(x, G)\}$$

und skizziere Q .

Lösung. Wir erinnern uns:

$$d^2(x + U, W) = \|\pi_{(U+W)^\perp}(x)\|^2 = \|x - \pi_{(U+W)}(x)\|^2$$

In der Norm steht etwas Lineares in den x_i , also sind Abstandsquadrate tatsächlich quadratische Polynome. Insbesondere ist dann

$$F = d^2(x, 0) - d^2(x, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

ein Q definierendes Polynom.

Wir wenden die affine Transformation $x \mapsto x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an und erhalten

$$\begin{aligned} F' &= d^2(x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0) - d^2(x, \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \\ &= x_1^2 + (x_2 + 1)^2 + x_3^2 - \|x - \underbrace{\frac{1}{2} \left\langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=x_1+x_3}\|^2 \\ &= x_1^2 + (x_2 + 1)^2 + x_3^2 - \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_2 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= x_1^2 + (x_2 + 1)^2 + x_3^2 - \frac{1}{4} (2(x_1 - x_3)^2 + 4x_2^2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1 + x_3^2 - \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_3 - \frac{1}{2}x_3^2 - x_2^2 \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3 + 2x_2 + 1 \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_3)^2 + 2x_2 + 1 \end{aligned}$$

Jetzt noch die affine Transformation $\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_3) \mapsto x_1$, $2x_2 + 1 \mapsto x_2$, $x_3 \mapsto x_3$ (das ist wohldefiniert, wie man durch Umstellen in die Form $\Phi(x) = \dots$ erkennt. Zwischenfrage: Können wir das Bild von x_3 beliebig wählen?):

$$\tilde{F} = x_1^2 + x_2$$

Aha, das ist eine Normalform vom Typ (iii), eine Parabel. Es ist auch interessant zu bemerken, dass wir die x_3 -Achse relativ beliebig wählen konnten. Die Abstandseigenschaft, über die Q definiert wurde, scheint also nicht erhalten worden zu sein!

