

# Tutorium 3

## 1 Nilpotente Endomorphismen

**Definition.** Sei  $\Phi \in \text{End}(V)$ .  $\Phi$  heißt nilpotent:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \Phi^n = 0$$

**Bemerkung.** Sei  $V \neq \{0\}$ . Dann ist  $\lambda = 0$  einziger EW. Und wegen

$$H(\Phi, 0) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Kern}((\Phi - 0 \cdot \text{id})^k) \supseteq \text{Kern}(\Phi^n) = \text{Kern}(0) = V$$

gilt nach dem Satz von letztem Mal  $H(\Phi, 0) = V$  und  $\text{CP}_{\Phi}(X) = X^{\dim V}$ .

Sei nun  $X^d$  das Minimalpolynom von  $\Phi$ , und  $u \in V$  mit  $\Phi^{d-1}(u) \neq 0$ . Betrachte

$$U := \left\langle \underbrace{u, \Phi(u), \dots, \Phi^{d-1}(u)}_{:=B} \right\rangle$$

Es ist klar, dass  $\dim U \leq d$ . Andererseits ist  $\Phi|_U$  auch nilpotent, und es gilt

$$\dim U = \text{Grad CP}_{\Phi|_U}(X) \geq \text{Grad MP}_{\Phi|_U}(X) \geq d$$

da  $\Phi^{d-1}(u) \neq 0$ . Bezüglich  $B$  hat  $\Phi|_U$  dann die Abbildungsmatrix:

$$J_d(0) := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix heißt Jordankästchen der Länge  $d$  zum EW 0.

Lemma aus der Vorlesung sagt: Es gibt ein  $\Phi$ -invariantes Komplement zu  $U \Rightarrow$  vollständige Induktion liefert den folgenden Satz:

**Satz.** Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine nilpotente Matrix. Dann gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen  $k$  und  $d_1 \geq \dots \geq d_k \geq 1$  sodass  $A$  ähnlich ist zu folgender Matrix:

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} J_{d_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(0) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix heißt Jordansche Normalform (JNF) von  $A$ .

**Bemerkung.** Für die Anzahl der Jordankästchen gilt:

$$k = \dim \text{Eig}(\Phi, 0) = \dim \text{Kern}(\Phi)$$

wie man durch Betrachten der JNF erkennt.

**Aufgabe 1.** Sei  $\Phi \in \text{End}(V)$ ,  $\dim V = 4$  und  $\text{Bild}(\Phi) \subseteq \text{Kern}(\Phi)$ . Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Minimalpolynom und Jordansche Normalform.

*Lösung.* Nach Voraussetzung gilt für alle  $x \in V$ :

$$\begin{aligned}\Phi(\Phi(x)) &= 0 \\ \Rightarrow \Phi^2 &= 0\end{aligned}$$

Also ist  $\Phi$  nilpotent, und also  $\text{CP}_\Phi(X) = X^4$ .

Außerdem ist  $X^2$  annullierendes Polynom, folglich  $\text{MP}_\Phi(X) \in \{X, X^2\}$ . Es gilt aber:

$$\text{MP}_\Phi(X) = X \Leftrightarrow \Phi = 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(\Phi) = 0$$

Also treffen wir eine Fallunterscheidung nach  $r := \text{Rang}(\Phi)$ .

1. Fall:  $r = 0 \Leftrightarrow k = 4$ , und die Jordansche Normalform ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Fall:  $r = 1 \Leftrightarrow k = 3$ , und es folgt zwingend:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(denn  $4 = 2 + 1 + 1$  ist ohne Beachtung der Reihenfolge die einzige Zerlegung der 4 in 3 Summanden)

3. Fall:  $r = 2 \Leftrightarrow k = 2$ , wir haben zwei mögliche Zerlegungen  $4 = 3 + 1 = 2 + 2$  in 2 Summanden. Aber wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

kann es kein Jordankästchen der Länge  $\geq 3$  geben, wir erhalten also als JNF:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Fall:  $r = 3 \Leftrightarrow k = 1$ , aber dann hätten wir ein Jordankästchen der Länge 4, was ja nicht möglich ist.

## 2 Die Jordansche Normalform

**Definition.** Die Matrix

$$J_d(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

heißt Jordankästchen der Länge  $d$  zum EW  $\lambda$ .

**Bemerkung.** Sei nun  $\Phi \in \text{End}(V)$  und das charakteristische Polynom zerfalle in Linearfaktoren. Wir wissen:

$$V = \bigoplus_{\lambda} H(\Phi, \lambda), \quad H(\Phi, \lambda) = \text{Kern}((\Phi - \lambda \cdot \text{id})^{\mu_a(\Phi, \lambda)})$$

Also ist  $(\Phi - \lambda \cdot \text{id})|_{H(\Phi, \lambda)}$  nilpotent, es gibt also eine Darstellung als JNF bestehend aus Jordankästchen  $J_{d_i}(\lambda)$ .

Aber es gilt ja:

$$\Phi|_{H(\Phi, \lambda)} = \lambda \cdot \text{id}_{H(\Phi, \lambda)} + (\Phi - \lambda \cdot \text{id})|_{H(\Phi, \lambda)}$$

Folglich gibt es für  $\Phi|_{H(\Phi, \lambda)}$  eine Darstellung als sogenanntem Jordanblock, bestehend aus Jordankästchen der Form  $J_{d_i}(\lambda)$ .

Macht man das für jeden EW  $\lambda$ , so erhält man den folgenden Satz:

**Satz.** Sei  $\Phi \in \text{End}(V)$ , und das charakteristische Polynom von  $\Phi$  zerfalle in Linearfaktoren. Weiterhin seien

$$\text{Spec}(\Phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$$

die  $l$  EWE von  $\Phi$ .

Dann gibt es für jeden EW  $\lambda_i$  eindeutig bestimmte natürliche Zahlen  $k_i$  und  $d_{1,i} \geq \dots \geq d_{k_i,i} \geq 1$  sodass  $\Phi$  bezüglich einer geeigneten Basis  $B$  die Abbildungsmatrix in Jordanscher Normalform (JNF)

$$D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_l \end{pmatrix}$$

hat, wobei

$$D_i := \begin{pmatrix} J_{d_{1,i}}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_{k_i,i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

der Jordanblock zum  $i$ -ten EW ist.

**Bemerkung.** Es gelten:

- (i) Die JNF ist eindeutig bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke/Eigenwerte.
- (ii) Länge des Blocks zum EW  $\lambda = \dim H(\Phi, \lambda) = \mu_a(\Phi, \lambda)$
- (iii) Anzahl Kästchen zum EW  $\lambda = k_i = \dim \text{Eig}(\Phi, \lambda) = \mu_g(\Phi, \lambda)$
- (iv) Länge des größten Kästchens zum EW  $\lambda = \text{Exponent von } (X - \lambda) \text{ im Minimalpolynom!}$
- (v) Für die Anzahl der Jordankästchen der Länge  $d$  zum EW  $\lambda$  gilt:

$$m_d(\lambda) = \text{Rang}((\Phi - \lambda \cdot \text{id})^{d-1}) - 2 \cdot \text{Rang}((\Phi - \lambda \cdot \text{id})^d) + \text{Rang}((\Phi - \lambda \cdot \text{id})^{d+1})$$

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

sowie eine Matrix  $S \in GL_4(\mathbb{R})$  sodass  $S^{-1}AS$  in Jordanscher Normalform ist.

*Lösung.*

$$\begin{aligned} \text{CP}_A(X) &= \det \begin{pmatrix} X+3 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & X-3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & X-2 & 1 \\ -4 & 4 & -4 & X+2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X+1 & -1 & X & 0 \\ 1 & X-1 & X & 0 \\ -2 & 2 & X-2 & 1 \\ 2X & -2X & -X^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} X+1 & -1 & X \\ 1 & X-1 & X \\ 2X & -2X & -X^2 \end{pmatrix} = -X^2 \cdot \det \begin{pmatrix} X+1 & -1 & 1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -X^2 \cdot \det \begin{pmatrix} X+1 & -1 & 1 \\ X & -X & 0 \\ X+3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -X^2 \cdot \det \begin{pmatrix} X & -X \\ X+3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= -X^2 \cdot (-3X + X^2 + 3X) = -X^4 \end{aligned}$$

Folglich gibt es genau einen Jordanblock, und zwar zum EW 0.

Es gilt  $A^2 = 0$ , also gilt

$$\text{MP}_A(X) = X^2$$

und das größte Jordankästchen hat Länge 2.

Wir berechnen nun  $\text{Eig}(A, 0) = \text{Kern}(A)$ , denn dessen Dimension liefert uns ja die Anzahl Jordankästchen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \text{Kern}(A) &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Es gibt also 2 Jordankästchen, wir erhalten folgende Jordansche Normalform:

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir finden wir die Jordanbasis? Wir suchen 2 Vektoren  $b_1, b_3$  in  $\text{Kern}(A^2) \setminus \text{Kern}(A)$ , so dass  $b_2 := Ab_1, b_4 := Ab_3$  linear unabhängig sind! Wir setzen an:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b_2 := Ab_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, b_4 := Ab_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und scheinen erfolgreich gewesen zu sein! Also:

$$S = (b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid b_4) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

und tatsächlich gilt  $S^{-1}AS = \tilde{A}$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $\Phi \in \text{End}(V)$ ,  $\dim V = 5$ ,  $\dim \text{Kern}(\Phi) = 1$  und  $CP_\Phi(X) = X^5 - 9X^3$ . Berechnen Sie die Jordansche Normalform von  $\Phi^2$ .

*Lösung.* Wir berechnen zunächst die Jordansche Normalform von  $\Phi$ . Wegen  $CP_\Phi(X) = X^3(X-3)(X+3)$  interessiert uns nur noch die Anzahl Jordankästchen zum Eigenwert 0, und die ist ja gerade gleich  $\dim \text{Kern}(\Phi) = 1$ . Also ist die JNF von  $\Phi$ :

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

und

$$J^2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ist eine Abbildungsmatrix von  $\Phi^2$ !

Also gilt  $CP_{J^2}(X) = X^3(X - 9)^2$ , und uns interessiert wieder nur die Anzahl Jordankästchen zum Eigenwert 0, also  $\dim \text{Kern}(\Phi^2) = \dim \text{Kern}(J^2) = 2$  (denn es gibt offenbar genau 3 l.u. Zeilen). Folglich ist die JNF von  $\Phi^2$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$