

# Tutorium 5

## 1 Wiederholung: Tensorprodukt

**Definition.** Seien  $V, W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $T$  mit einer bilinearen Abbildung

$$\otimes : V \times W \rightarrow T$$

heißt Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ , wenn folgende universelle Abbildungseigenschaft (UAE) erfüllt wird:

Für jede bilineare Abbildung  $\phi : V \times W \rightarrow U$  existiert *genau eine* lineare Abbildung  $\Phi : T \rightarrow U$  so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & T \\ & \searrow \phi & \downarrow \Phi \\ & & U \end{array}$$

(also  $\phi = \Phi \circ \otimes$ .)

**Satz.** Seien  $V, W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Dann existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutiges) Tensorprodukt  $V \otimes W$  (oder  $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ ).

Sind  $V$  und  $W$  endlichdimensional, dann gilt sogar:

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$$

**Beispiel.**

$$V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K}^m$$

$$\dim V, \dim W < \infty$$

Setze  $T := \mathbb{K}^{n \times m}$  und

$$\otimes : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^{n \times m}, (v, w) \mapsto vw^T$$

Sei nun  $\phi : V \times W \rightarrow U$  bilinear. Dann soll gelten:

$$\Phi(E_{i,j}) = \Phi(e_i \otimes e_j) = \phi(e_i, e_j)$$

Die  $E_{i,j}$  bilden eine Basis des  $\mathbb{K}^{n \times m}$ . Also definieren wir  $\Phi$  gerade durch lineare Fortsetzung dieser Beziehung, und rechnen nach dass somit  $\phi = \Phi \circ \otimes$  gilt.

Setze  $T := \text{Hom}(V^*, W)$  und

$$\otimes : V \times W \rightarrow \text{Hom}(V^*, W), (v, w) \mapsto \lambda \mapsto \lambda(v)w$$

Sei nun  $\phi : V \times W \rightarrow U$  bilinear. Dann soll gelten:

$$\Phi(b \otimes c) = \phi(b, c) \quad \forall b \in B, c \in C$$

wobei  $B$  und  $C$  Basen von  $V$  bzw.  $W$  sind. Die  $\{b \otimes c \mid b \in B, c \in C\}$  bilden eine Basis von  $\text{Hom}(V^*, W)$ , also definieren wir  $\Phi$  gerade durch lineare Fortsetzung dieser Beziehung, und rechnen nach dass somit  $\phi = \Phi \circ \otimes$  gilt.

## 2 Multilinearformen und $n$ -faches Tensorprodukt

**Definition.** Seien  $V_1, \dots, V_n$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Eine Abbildung

$$\phi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

heißt ( $n$ -fach) multilinear, wenn  $\phi$  in jedem Argument linear ist.

**Definition.** Seien  $V_1, \dots, V_n$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $T$  mit einer multilinearen Abbildung

$$\otimes^n : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow T$$

heißt ( $n$ -faches) Tensorprodukt, wenn die folgende UAE gilt:

Für jede multilineare Abbildung  $\phi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow U$  existiert *genau eine* lineare Abbildung  $\Phi : T \rightarrow U$  so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_n & \xrightarrow{\otimes^n} & T \\ & \searrow \phi & \downarrow \Phi \\ & & U \end{array}$$

(also  $\phi = \Phi \circ \otimes^n$ .)

**Definition.** Seien  $V_1, \dots, V_n, W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Wir definieren induktiv:

$$\bigotimes_{i=1}^n V_i := V_1 \otimes \dots \otimes V_n := (V_1 \otimes \dots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n$$

$$\otimes^n (v_1, \dots, v_n) := v_1 \otimes \dots \otimes v_n := (v_1 \otimes \dots \otimes v_{n-1}) \otimes v_n$$

(für  $n \geq 3$ )

**Aufgabe 1** (Existenz). Seien  $V_1, \dots, V_n, W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Zeigen Sie, dass  $\bigotimes_{i=1}^n V_i$  ein Tensorprodukt ist.

*Beweis.* [v.I. über  $n$ ] Für  $n = 2$  ist nichts mehr zu zeigen; wir betrachten  $n \rightarrow n + 1$ :

Sei  $\phi : V_1 \times \dots \times V_{n+1} \rightarrow W$   $(n + 1)$ -fach multilinear. Wir betrachten nun für ein festes  $x \in V_{n+1}$ :

$$\phi_x : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto \phi(v_1, \dots, v_n, x)$$

Diese Abbildung ist  $n$ -fach multilinear; nach IH existiert also eine lineare Abbildung

$$\Phi_x : V_1 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W \quad \text{mit } \phi_x = \Phi_x \circ \otimes^n$$

Betrachte nun

$$\psi : (V_1 \otimes \dots \otimes V_n) \times V_{n+1} \rightarrow W, \quad (v, x) \mapsto \phi_x(v)$$

Diese Abbildung ist bilinear, nach IH existiert also eine lineare Abbildung

$$\Psi : (V_1 \otimes \dots \otimes V_n) \otimes V_{n+1} \rightarrow W \quad \text{mit } \psi = \Psi \circ \otimes$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \phi(v_1, \dots, v_{n+1}) &= \phi_{v_{n+1}}(v_1, \dots, v_n) = \Phi_{v_{n+1}}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \\ &= \psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_n, v_{n+1}) = \Psi((v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \otimes v_{n+1}) \end{aligned}$$

$\Psi$  ist also die gesuchte lineare Abbildung, die UAE ist erfüllt. □

**Bemerkung.** Genauso wie beim "normalen" Tensorprodukt beweist man die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie). Daher macht die Schreibweise oben Sinn, und auch weil das folgende "Assoziativgesetz" gilt:

$$U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$$

**Definition.** Eine multilineare Abbildung  $\phi : V^n \rightarrow W$  heißt alternierend, wenn gilt:

$$\phi(v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{falls } v_i = v_j \text{ für ein } i \neq j$$

**Korollar.** Sei  $\phi : V^n \rightarrow W$  eine alternierende multilineare Abbildung. Dann gilt:

(i)  $\phi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) = -\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$

(ii)  $v_1, \dots, v_n$  linear abhängig  $\Rightarrow \phi(v_1, \dots, v_n) = 0$

Für  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  gilt auch die Umkehrung von (i).

**Aufgabe 2.** Sei  $\phi : V^n \rightarrow W$  eine alternierende multilineare Abbildung,  $v_1, \dots, v_n \in V$  und  $\sigma \in S_n$ . Zeigen Sie:

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot \phi(v_1, \dots, v_n)$$

*Beweis.* Wir können  $\sigma$  als Produkt von Transpositionen schreiben:

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$$

und wissen, dass  $\text{sign}(\sigma) = (-1)^k$  gilt. Aber nach dem Korollar hat man

$$\phi(v_{\tau_i(1)}, \dots, v_{\tau_i(n)}) = -\phi(v_1, \dots, v_n)$$

und induktiv führt das zu

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = (-1)^k \cdot \phi(v_1, \dots, v_n) = \text{sign}(\sigma) \cdot \phi(v_1, \dots, v_n)$$

□

**Satz.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Basis  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Dann gibt es zu jedem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $W$  und  $w_{i,j} \in W$  (für  $1 \leq i < j \leq n$ ) genau eine alternierende bilineare Abbildung  $\phi : V \times V \rightarrow W$  mit  $\phi(b_i, b_j) = w_{i,j}$ .

**Bemerkung.** Analog für  $V^k$  für  $k \leq n$  (mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ).

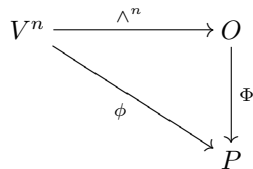
### 3 Äußeres und symmetrisches Produkt

**Definition.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $n \in \mathbb{N}$ . Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $O$  mit einer multilinearen *alternierenden* Abbildung

$$\wedge^n : V^n \rightarrow O$$

heißt ( $n$ -tes) äußeres Produkt von  $V$ , wenn gilt:

Für jeden  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $P$  und jede  $n$ -fache multilineare *alternierende* Abbildung  $\phi : V^n \rightarrow P$  gibt es genau eine lineare Abbildung  $\Phi : O \rightarrow P$  so dass das folgende Diagramm kommutiert:



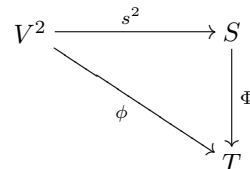
(also  $\phi = \Phi \circ \wedge^n$ .)

**Definition.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $S$  mit einer multilinearen *symmetrischen* Abbildung

$$s : V^2 \rightarrow S$$

heißt (2-faches) symmetrisches Produkt von  $V$ , wenn gilt:

Für jeden  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $T$  und jede 2-fache multilineare *symmetrische* Abbildung  $\phi : V^2 \rightarrow T$  gibt es genau eine lineare Abbildung  $\Phi : S \rightarrow T$  so dass das folgende Diagramm kommutiert:



(also  $\phi = \Phi \circ s$ .)

**Satz.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutiges)  $n$ -tes äußeres Produkt  $\bigwedge^n V$ .

*Beweis.* Eindeutigkeit wie beim Tensorprodukt. Sei  $T := V \otimes \dots \otimes V$  mit  $\otimes^n : V^n \rightarrow T$  das  $n$ -fache Tensorprodukt, und

$$U := \langle \{v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mid v_i = v_j \text{ für ein } i \neq j\} \rangle$$

Setze  $\bigwedge^n V := T/U$ . Die Komposition

$$\bigwedge^n : V^n \rightarrow \bigwedge^n V, \quad \bigwedge^n = \kappa \circ \otimes^n$$

(mit der kanonischen Projektion  $\kappa$ ) ist dann bilinear und *alternierend*, denn

$$\begin{aligned} & \bigwedge^n(v_1, \dots, v_n) \\ &= \kappa(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = 0 \end{aligned}$$

(falls  $v_i = v_j$  für ein  $i \neq j$ ).

Sei nun  $\phi : V^n \rightarrow P$  multilinear und *alternierend*. Dann gibt es nach der UAE für das Tensorprodukt genau eine lineare Abbildung  $\Phi : T \rightarrow P$  mit  $\phi = \Phi \circ \otimes^n$ .

Da  $\phi$  *alternierend* ist, gilt  $U \subseteq \text{Kern } \Phi$ , und der Homomorphiesatz liefert die gesuchte eindeutig bestimmte Abbildung  $\bar{\Phi} : \bigwedge^n V \rightarrow P$  mit  $\Phi = \bar{\Phi} \circ \kappa$ , also  $\phi = \bar{\Phi} \circ \kappa \circ \otimes^n = \bar{\Phi} \circ \bigwedge^n$ .  $\square$

**Aufgabe 3.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutiges) 2-faches *symmetrisches* Produkt  $S$ .

*Beweis.* Eindeutigkeit wie beim Tensorprodukt. Sei  $T := V \otimes V$  mit  $\otimes^2 : V^2 \rightarrow T$  das 2-fache Tensorprodukt, und

$$U := \langle \{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V\} \rangle$$

Setze  $S := T/U$ . Die Komposition

$$s : V^2 \rightarrow S, \quad s = \kappa \circ \otimes^2$$

(mit der kanonischen Projektion  $\kappa$ ) ist dann bilinear und *symmetrisch*, denn

$$\begin{aligned} & s(v, w) - s(w, v) = \kappa(v \otimes w) - \kappa(w \otimes v) \\ &= \kappa(v \otimes w - w \otimes v) = 0 \end{aligned}$$

Sei nun  $\phi : V^2 \rightarrow P$  multilinear und *symmetrisch*. Dann gibt es nach der UAE für das Tensorprodukt genau eine lineare Abbildung  $\Phi : T \rightarrow P$  mit  $\phi = \Phi \circ \otimes^2$ .

Da  $\phi$  *symmetrisch* ist, gilt  $U \subseteq \text{Kern } \Phi$ , und der Homomorphiesatz liefert die gesuchte eindeutig bestimmte Abbildung  $\bar{\Phi} : S \rightarrow P$  mit  $\Phi = \bar{\Phi} \circ \kappa$ , also  $\phi = \bar{\Phi} \circ \kappa \circ \otimes^2 = \bar{\Phi} \circ s$ .  $\square$

**Bemerkung.** Statt  $\bigwedge^n(v_1, \dots, v_n)$  schreibt man oft auch  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ .

$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$  ist eine Basis von  $\bigwedge^k V$  ( $\dim V = n$ ). Folglich gilt:  $\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}$ .

## 4 Äußere direkte Summe

**Definition und Satz.** Seien  $V, W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Dann ist  $V \times W$  mit

$$(v, w) + (x, y) := (v + x, w + y)$$

$$\lambda \cdot (v, w) := (\lambda \cdot v, \lambda \cdot w)$$

ein Vektorraum, die sogenannte äußere direkte Summe.

**Aufgabe 4.** Seien  $V, W$  Vektorräume. Zeigen Sie:  $V$  und  $W$  können als UVRen von  $V \times W$  aufgefasst werden, so dass die innere direkte Summe dieser UVRen gerade  $V \times W$  ergibt.

*Beweis.* Die Abbildungen

$$i : V \rightarrow V \times W, v \mapsto (v, 0)$$

$$j : W \rightarrow V \times W, w \mapsto (0, w)$$

sind injektiv und linear, folglich können wir  $V$  und  $W$  mit den UVRen  $i(V) = V \times \{0\}$  bzw.  $j(W) = \{0\} \times W$  identifizieren (d.h. die Vektorräume sind jeweils isomorph).

Wegen  $(V \times \{0\}) \cap (\{0\} \times W) = \{(0, 0)\}$  ist die innere Summe  $i(V) \oplus i(W)$  direkt, und wegen  $(v, w) = (v, 0) + (0, w)$  gilt  $i(V) \oplus i(W) = V \times W$ .  $\square$