

Tutorium 5

1 Wiederholung: Tensorprodukt

Definition. Seien V, W \mathbb{K} -Vektorräume. Ein \mathbb{K} -Vektorraum T mit einer bilinearen Abbildung

$$\otimes : V \times W \rightarrow T$$

heißt Tensorprodukt von V und W , wenn folgende universelle Abbildungseigenschaft (UAE) erfüllt wird:

Für jede bilineare Abbildung $\phi : V \times W \rightarrow U$ existiert *genau eine* lineare Abbildung $\Phi : T \rightarrow U$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{\otimes} & T \\
 & \searrow \phi & \downarrow \Phi \\
 & & U
 \end{array}$$

(also $\phi = \Phi \circ \otimes$.)

Satz. Seien V, W \mathbb{K} -Vektorräume. Dann existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutiges) Tensorprodukt $V \otimes W$ (oder $V \otimes_{\mathbb{K}} W$).

Sind V und W endlichdimensional, dann gilt sogar:

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$$

Beispiel.

$V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K}^m$	$\dim V, \dim W < \infty$
<p>Setze $T := \mathbb{K}^{n \times m}$ und</p> $\otimes : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^{n \times m}, (v, w) \mapsto vw^T$ <p>Sei nun $\phi : V \times W \rightarrow U$ bilinear. Dann soll gelten:</p> $\Phi(E_{i,j}) = \Phi(e_i \otimes e_j) = \phi(e_i, e_j)$ <p>Die $E_{i,j}$ bilden eine Basis des $\mathbb{K}^{n \times m}$. Also definieren wir Φ gerade durch lineare Fortsetzung dieser Beziehung, und rechnen nach dass somit $\phi = \Phi \circ \otimes$ gilt.</p>	<p>Setze $T := \text{Hom}(V^*, W)$ und</p> $\otimes : V \times W \rightarrow \text{Hom}(V^*, W), (v, w) \mapsto \lambda \mapsto \lambda(v)w$ <p>Sei nun $\phi : V \times W \rightarrow U$ bilinear. Dann soll gelten:</p> $\Phi(b \otimes c) = \phi(b, c) \quad \forall b \in B, c \in C$ <p>wobei B und C Basen von V bzw. W sind. Die $\{b \otimes c \mid b \in B, c \in C\}$ bilden eine Basis von $\text{Hom}(V^*, W)$, also definieren wir Φ gerade durch lineare Fortsetzung dieser Beziehung, und rechnen nach dass somit $\phi = \Phi \circ \otimes$ gilt.</p>

2 Multilinearformen und n -faches Tensorprodukt

Definition. Seien V_1, \dots, V_n \mathbb{K} -Vektorräume. Eine Abbildung

$$\phi: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

heißt (n -fach) multilinear, wenn ϕ in jedem Argument linear ist.

Definition. Seien V_1, \dots, V_n \mathbb{K} -Vektorräume. Ein \mathbb{K} -Vektorraum T mit einer multilinenaren Abbildung

$$\otimes^n: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow T$$

heißt (n -faches) Tensorprodukt, wenn die folgende UAE gilt:

Für jede multilinerare Abbildung $\phi: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow U$ existiert *genau eine* lineare Abbildung $\Phi: T \rightarrow U$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_n & \xrightarrow{\otimes^n} & T \\ & \searrow \phi & \downarrow \Phi \\ & & U \end{array}$$

(also $\phi = \Phi \circ \otimes^n$.)

Definition. Seien V_1, \dots, V_n, W \mathbb{K} -Vektorräume. Wir definieren induktiv:

$$\begin{aligned} \bigotimes_{i=1}^n V_i &:= V_1 \otimes \dots \otimes V_n := (V_1 \otimes \dots \otimes V_{n-1}) \otimes V_n \\ \otimes^n (v_1, \dots, v_n) &:= v_1 \otimes \dots \otimes v_n := (v_1 \otimes \dots \otimes v_{n-1}) \otimes v_n \end{aligned}$$

(für $n \geq 3$)

Aufgabe 1 (Existenz). Seien V_1, \dots, V_n, W \mathbb{K} -Vektorräume. Zeigen Sie, dass $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ ein Tensorprodukt ist.

Beweis. [v.I. über n] Für $n = 2$ ist nichts mehr zu zeigen; wir betrachten $n \rightarrow n + 1$:

Sei $\phi: V_1 \times \dots \times V_{n+1} \rightarrow W$ ($n + 1$)-fach multilinear. Wir betrachten nun für ein festes $x \in V_{n+1}$:

$$\phi_x: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto \phi(v_1, \dots, v_n, x)$$

Diese Abbildung ist n -fach multilinear; nach IH existiert also eine lineare Abbildung

$$\Phi_x: V_1 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W \quad \text{mit } \phi_x = \Phi_x \circ \otimes^n$$

Betrachte nun

$$\psi: (V_1 \otimes \dots \otimes V_n) \times V_{n+1} \rightarrow W, \quad (v, x) \mapsto \phi_x(v)$$

Diese Abbildung ist bilinear, nach IH existiert also eine lineare Abbildung

$$\Psi: (V_1 \otimes \dots \otimes V_n) \otimes V_{n+1} \rightarrow W \quad \text{mit } \psi = \Psi \circ \otimes$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}\phi(v_1, \dots, v_{n+1}) &= \phi_{v_{n+1}}(v_1, \dots, v_n) = \Phi_{v_{n+1}}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \\ &= \psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_n, v_{n+1}) = \Psi((v_1 \otimes \dots \otimes v_n) \otimes v_{n+1})\end{aligned}$$

Ψ ist also die gesuchte lineare Abbildung, die UAE ist erfüllt. \square

Bemerkung. Genauso wie beim “normalen” Tensorprodukt beweist man die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie). Daher macht die Schreibweise oben Sinn, und auch weil das folgende “Assoziativgesetz” gilt:

$$U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$$

Definition. Eine multilineare Abbildung $\phi : V^n \rightarrow W$ heißt alternierend, wenn gilt:

$$\phi(v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{falls } v_i = v_j \text{ für ein } i \neq j$$

Korollar. Sei $\phi : V^n \rightarrow W$ eine alternierende multilineare Abbildung. Dann gilt:

- (i) $\phi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) = -\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$
- (ii) v_1, \dots, v_n linear abhängig $\Rightarrow \phi(v_1, \dots, v_n) = 0$

Für $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ gilt auch die Umkehrung von (i).

Aufgabe 2. Sei $\phi : V^n \rightarrow W$ eine alternierende multilineare Abbildung, $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\sigma \in S_n$. Zeigen Sie:

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot \phi(v_1, \dots, v_n)$$

Beweis. Wir können σ als Produkt von Transpositionen schreiben:

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$$

und wissen, dass $\text{sign}(\sigma) = (-1)^k$ gilt. Aber nach dem Korollar hat man

$$\phi(v_{\tau_i(1)}, \dots, v_{\tau_i(n)}) = -\phi(v_1, \dots, v_n)$$

und induktiv führt das zu

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = (-1)^k \cdot \phi(v_1, \dots, v_n) = \text{sign}(\sigma) \cdot \phi(v_1, \dots, v_n)$$

\square

Satz. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Dann gibt es zu jedem \mathbb{K} -Vektorraum W und $w_{i,j} \in W$ (für $1 \leq i < j \leq n$) genau eine alternierende bilineare Abbildung $\phi : V \times V \rightarrow W$ mit $\phi(b_i, b_j) = w_{i,j}$.

Bemerkung. Analog für V^k für $k \leq n$ (mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$).

3 Äußeres und symmetrisches Produkt

<p>Definition. Sei V ein \mathbb{K}-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Ein \mathbb{K}-Vektorraum O mit einer multilinearen <i>alternierenden</i> Abbildung</p> $\wedge^n : V^n \rightarrow O$ <p>heißt (n-tes) <u>äußeres Produkt</u> von V, wenn gilt:</p> <p>Für jeden \mathbb{K}-Vektorraum P und jede n-fache multilineare <i>alternierende</i> Abbildung $\phi : V^n \rightarrow P$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\Phi : O \rightarrow P$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:</p> $\begin{array}{ccc} V^n & \xrightarrow{\wedge^n} & O \\ & \searrow \phi & \downarrow \Phi \\ & & P \end{array}$ <p>(also $\phi = \Phi \circ \wedge^n$.)</p>	<p>Definition. Sei V ein \mathbb{K}-Vektorraum. Ein \mathbb{K}-Vektorraum S mit einer multilinearen <i>symmetrischen</i> Abbildung</p> $s : V^2 \rightarrow S$ <p>heißt (2-faches) <u>symmetrisches Produkt</u> von V, wenn gilt:</p> <p>Für jeden \mathbb{K}-Vektorraum T und jede 2-fache multilineare <i>symmetrische</i> Abbildung $\phi : V^2 \rightarrow T$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\Phi : S \rightarrow T$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:</p> $\begin{array}{ccc} V^2 & \xrightarrow{s^2} & S \\ & \searrow \phi & \downarrow \Phi \\ & & T \end{array}$ <p>(also $\phi = \Phi \circ s$.)</p>
--	--

<p>Satz. Sei V ein \mathbb{K}-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutiges) n-tes <i>äußeres</i> Produkt $\wedge^n V$.</p> <p><i>Beweis.</i> Eindeutigkeit wie beim Tensorprodukt. Sei $T := V \otimes \dots \otimes V$ mit $\otimes^n : V^n \rightarrow T$ das n-fache Tensorprodukt, und</p> $U := \langle \{v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mid v_i = v_j \text{ für ein } i \neq j\} \rangle$ <p>Setze $\wedge^n V := T/U$. Die Komposition</p> $\wedge^n : V^n \rightarrow \wedge^n V, \quad \wedge^n = \kappa \circ \otimes^n$ <p>(mit der kanonischen Projektion κ) ist dann bilinear und <i>alternierend</i>, denn</p> $\begin{aligned} & \wedge^n(v_1, \dots, v_n) \\ &= \kappa(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = 0 \end{aligned}$ <p>(falls $v_i = v_j$ für ein $i \neq j$).</p> <p>Sei nun $\phi : V^n \rightarrow P$ multilinear und <i>alternierend</i>. Dann gibt es nach der UAE für das Tensorprodukt genau eine lineare Abbildung $\Phi : T \rightarrow P$ mit $\phi = \Phi \circ \otimes^n$.</p> <p>Da ϕ <i>alternierend</i> ist, gilt $U \subseteq \text{Kern } \Phi$, und der Homomorphiesatz liefert die gesuchte eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{\Phi} : \wedge^n V \rightarrow P$ mit $\Phi = \bar{\Phi} \circ \kappa$, also $\phi = \bar{\Phi} \circ \kappa \circ \otimes^n = \bar{\Phi} \circ \wedge^n$. \square</p>	<p>Aufgabe 3. Sei V ein \mathbb{K}-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein (bis auf Isomorphie eindeutiges) 2-faches <i>symmetrisches</i> Produkt S.</p> <p><i>Beweis.</i> Eindeutigkeit wie beim Tensorprodukt. Sei $T := V \otimes V$ mit $\otimes^2 : V^2 \rightarrow T$ das 2-fache Tensorprodukt, und</p> $U := \langle \{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V\} \rangle$ <p>Setze $S := T/U$. Die Komposition</p> $s : V^2 \rightarrow S, \quad s = \kappa \circ \otimes^2$ <p>(mit der kanonischen Projektion κ) ist dann bilinear und <i>symmetrisch</i>, denn</p> $\begin{aligned} & s(v, w) - s(w, v) = \kappa(v \otimes w) - \kappa(w \otimes v) \\ &= \kappa(v \otimes w - w \otimes v) = 0 \end{aligned}$ <p>Sei nun $\phi : V^2 \rightarrow P$ multilinear und <i>symmetrisch</i>. Dann gibt es nach der UAE für das Tensorprodukt genau eine lineare Abbildung $\Phi : T \rightarrow P$ mit $\phi = \Phi \circ \otimes^2$.</p> <p>Da ϕ <i>symmetrisch</i> ist, gilt $U \subseteq \text{Kern } \Phi$, und der Homomorphiesatz liefert die gesuchte eindeutig bestimmte Abbildung $\bar{\Phi} : S \rightarrow P$ mit $\Phi = \bar{\Phi} \circ \kappa$, also $\phi = \bar{\Phi} \circ \kappa \circ \otimes^2 = \bar{\Phi} \circ s$. \square</p>
--	--

Bemerkung. Statt $\wedge^n(v_1, \dots, v_n)$ schreibt man oft auch $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$.

$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ ist eine Basis von $\wedge^k V$ ($\dim V = n$).
Folglich gilt: $\dim \wedge^k V = \binom{n}{k}$.

4 Äußere direkte Summe

Definition und Satz. Seien V, W \mathbb{K} -Vektorräume. Dann ist $V \times W$ mit

$$(v, w) + (x, y) := (v + x, w + y)$$

$$\lambda \cdot (v, w) := (\lambda \cdot v, \lambda \cdot w)$$

ein Vektorraum, die sogenannte äußere direkte Summe.

Aufgabe 4. Seien V, W Vektorräume. Zeigen Sie: V und W können als UVRe von $V \times W$ aufgefasst werden, so dass die innere direkte Summe dieser UVRe gerade $V \times W$ ergibt.

Beweis. Die Abbildungen

$$i : V \rightarrow V \times W, v \mapsto (v, 0)$$

$$j : W \rightarrow V \times W, w \mapsto (0, w)$$

sind injektiv und linear, folglich können wir V und W mit den UVRen $i(V) = V \times \{0\}$ bzw. $j(W) = \{0\} \times W$ identifizieren (d.h. die Vektorräume sind jeweils isomorph).

Wegen $(V \times \{0\}) \cap (\{0\} \times W) = \{(0, 0)\}$ ist die innere Summe $i(V) \oplus i(W)$ direkt, und wegen $(v, w) = (v, 0) + (0, w)$ gilt $i(V) \oplus i(W) = V \times W$. \square