

Tutorium 7

1 Skalarprodukte

Bemerkung. Für jeden komplexen Vektorraum V mit $\dim V \geq 2$ und jede komplexe Bilinearform P auf V findet man einen Vektor $v \neq 0$ mit $P(v, v) = 0$.

Es gibt also keine positiv definite Bilinearformen über V !

Definition. Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt $:\Leftrightarrow$

(i) $\langle \lambda v + w, x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \langle w, x \rangle$
 $\langle v, \lambda x + y \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \langle v, y \rangle$
(Bilinearität)

(ii) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (Symmetrie)

(iii) $v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0$ (Positive Definitheit)

Ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt heißt euklidischer Raum.

Definition. Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt komplexes Skalarprodukt $:\Leftrightarrow$

(i) $\langle \lambda v + w, x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \langle w, x \rangle$
 $\langle v, \lambda x + y \rangle = \bar{\lambda} \langle v, x \rangle + \langle v, y \rangle$
(Sesquilinearität)

(ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (Hermitezität)

(iii) $v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0$ (Positive Definitheit)

Ein \mathbb{C} -Vektorraum mit komplexem Skalarprodukt heißt unitärer Raum.

Beispiel. Das Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T y$$

heißt Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n , dieser heißt dann n -dimensionaler euklidischer Standardraum.

Beispiel.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x^T \bar{y}$$

heißt (komplexes) Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{C}^n , dieser heißt dann n -dimensionaler unitärer Standardraum.

<p>Satz. Die Fundamentalmatrix</p> $D_{B,B}(\langle \cdot, \cdot \rangle) := (\langle b_i, b_j \rangle) =: F$ <p>ist symmetrisch ($F^T = F$) und positiv definit, und es gilt:</p> $\langle v, w \rangle = D_B(v)^T \cdot D_{B,B} \cdot D_B(w)$	<p>Satz. Die Fundamentalmatrix</p> $D_{B,B}(\langle \cdot, \cdot \rangle) := (\langle b_i, b_j \rangle) =: F$ <p>ist <u>hermitesch</u> ($F^T = \overline{F}$) und positiv definit, und es gilt:</p> $\langle v, w \rangle = D_B(v)^T \cdot D_{B,B} \cdot \overline{D_B(w)}$
---	---

<p>Satz (Hurwitz-Kriterium). Sei $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. F ist positiv definit $:\Leftrightarrow$</p> $\det F_k > 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n$	<p>Satz (Hurwitz-Kriterium). Sei $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch. F ist positiv definit $:\Leftrightarrow$</p> $\det F_k > 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n$ <p style="text-align: center;">mit $F_k := (f_{i,j}) \in \mathbb{C}^{k \times k}$</p>
---	---

Bemerkung. Es sei nun V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alles was folgt gilt aber genauso für unitäre Vektorräume!

<p>Satz (CSU). Für alle $v, w \in V$ gilt:</p> $\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$
--

Aufgabe 1. Finde eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform B auf dem \mathbb{R}^7 sodass $B(m, m) = 0$ für $m = (1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1)^T$.

Lösung. Es genügt, eine entsprechende Fundamentalmatrix F zu finden. Wir setzen eine Diagonalmatrix an, denn diese ist symmetrisch und mit ihr lässt sich leicht rechnen:

$$F = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_7)$$

$$\Rightarrow m^T \cdot F \cdot m = \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 + 4\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_7$$

Wir wählen also z.B. $\lambda_1 = \dots = \lambda_6 = 1$ und $\lambda_7 = -20$ und sind fertig, denn F hat somit vollen Rang, B ist also nicht ausgeartet!

2 Norm und Metrik

Definition. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm $:\Leftrightarrow$

- (i) $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- (ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
- (iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Definition. Eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik $:\Leftrightarrow$

- (i) $d(x, x) \geq 0$ und $d(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $y \in M$

Bemerkung. Intuitiv: Normen messen Längen, Metriken messen Abstände!

Eine Metrik benötigt keinen VR!

Definition und Satz. Jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induziert eine Norm

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

und jede Norm $\|\cdot\|$ induziert eine Metrik

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

Aufgabe 2. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das durch die Fundamentalmatrix $F := (f_{i,j})$, $f_{i,j} := 1 + \delta_{i,j}$ gegebene Skalarprodukt auf \mathbb{R}^7 . Bestimme die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm von $m = (1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1)$.

Lösung.

$$\begin{aligned} \|m\|^2 &= \langle m, m \rangle = m^T \cdot F \cdot m \\ &= m^T \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} m + m^T m = m^T \begin{pmatrix} \sum m_i \\ \vdots \\ \sum m_i \end{pmatrix} + m^T m = (\sum m_i) m^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + m^T m = (\sum m_i)^2 + \sum m_i^2 \\ &= 10^2 + 20 = 120 \end{aligned}$$

3 Orthogonalität

Definition. $v, w \in V$ heißen orthogonal : $\Leftrightarrow v \perp w$: \Leftrightarrow

$$\langle v, w \rangle = 0$$

Aufgabe 3. Sei V ein unitärer Vektorraum und $v, w \in V$. Zeigen Sie:

$$\|w\| \leq \|\lambda v + w\| \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \Leftrightarrow v \perp w$$

Beweis. Für $v = 0$ ist die Aussage trivial, wir betrachten $v \neq 0$:

$$\begin{aligned} \langle w, w \rangle &\leq \langle \lambda v + w, \lambda v + w \rangle \\ \Rightarrow \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle + \lambda \langle v, w \rangle + \bar{\lambda} \langle w, v \rangle &\geq 0 \\ \Rightarrow |\lambda|^2 \langle v, v \rangle + \lambda \langle v, w \rangle + \overline{\lambda \langle v, w \rangle} &\geq 0 \\ \Rightarrow |\lambda|^2 \langle v, v \rangle + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle v, w \rangle) &\geq 0 \end{aligned}$$

Das liefert zum einen die Rückrichtung, andererseits gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}$:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \langle v, v \rangle + 2\lambda \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) &\geq 0 \\ \Rightarrow \lambda \langle v, v \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) &\leq 0 \\ \Rightarrow \lambda \leq \underbrace{-2 \frac{\operatorname{Re}(\langle v, w \rangle)}{\langle v, v \rangle}}_{\leq 0} \\ \Rightarrow \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) &= 0 \end{aligned}$$

sowie für alle $\lambda i \in \mathbb{R}_{>0}i$:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \langle v, v \rangle + 2 \operatorname{Re}(\lambda i \langle v, w \rangle) &\geq 0 \\ \lambda^2 \langle v, v \rangle - 2\lambda \operatorname{Im}(\langle v, w \rangle) &\geq 0 \\ \Rightarrow \lambda \langle v, v \rangle - 2 \operatorname{Im}(\langle v, w \rangle) &\geq 0 \\ \Rightarrow \lambda \geq \underbrace{2 \frac{\operatorname{Im}(\langle v, w \rangle)}{\langle v, v \rangle}}_{\geq 0} \\ \Rightarrow \operatorname{Im}(\langle v, w \rangle) &= 0 \end{aligned}$$

was die Hinrichtung zeigt. □

Definition. $0 \notin M \subseteq V$ heißt Orthogonalsystem (OGS) $:\Leftrightarrow$

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \text{für } v, w \in M, v \neq w$$

Gilt zusätzlich $\langle v, v \rangle = 1$ für alle $v \in M$, so heißt M Orthonormalsystem (ONS).

Ist M Basis von V , so heißt M Orthogonalbasis (OGB) bzw. Orthonormalbasis (ONB).

Bemerkung. Jedes OGS lässt sich durch Normierung ($v' := \frac{v}{\|v\|}$) in ein ONS verwandeln.

Satz (Fourierformel). Ist B eine OGB bzw. eine ONB, so gilt:

$$v = \sum_{b \in B} \frac{\langle v, b \rangle}{\langle b, b \rangle} b \quad \text{bzw.} \quad v = \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle b$$

Korollar. M OGS $\Rightarrow M$ l.u.

Satz (E. Schmidt). Sei $v_1, \dots, v_k \subseteq V$ l.u. mit k Elementen. Dann ist die Menge w_1, \dots, w_k definiert durch

$$w_1 := v_1$$

$$w_j := v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

ein OGS mit $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$.

Definition und Satz. Sei U ein UVR von V mit $\dim U < \infty$. Dann ist das orthogonale Komplement

$$U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U : v \perp u\}$$

ein UVR von V mit $V = U \oplus U^\perp$.

Also lässt sich jedes $v = u + u^\perp \in V$ mit $u \in U, u^\perp \in U^\perp$ schreiben, und man hat die orthogonale Projektion von V auf U :

$$\pi_U : V \rightarrow U, \quad u + u^\perp \mapsto u$$

Aufgabe 4. Sei U der von

$$u_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte UVR des \mathbb{C}^4 mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie eine ONB von U^\perp und die orthogonale Projektion π_{U^\perp} .

Lösung. Durch "scharfes Hinsehen"

$$\begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp u_1, u_2$$

Wir orthogonalisieren diese Vektoren mit E. Schmidt:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2i}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

und erhalten $w_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}v_1, w_2 := \frac{1}{\sqrt{6}}v_2$ als ONB von U^\perp . Fourierformel:

$$\pi_{U^\perp}(x) = \langle x, w_1 \rangle w_1 + \langle x, w_2 \rangle w_2 = \frac{1}{2} \left\langle x, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \left\langle x, \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \dots$$

4 Abstände

Definition. Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq V$. Dann heißt

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

der Abstand von A und B .

Definition. Seien $a \in V$ und U UVR von V . Dann heißt

$$a + U := \{a + u \mid u \in U\}$$

affiner Teilraum von V . Insbesondere heißt

$$\overline{ab} := \{a + \lambda(b - a) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = a + \langle b - a \rangle$$

Gerade durch a und b .

Satz. Sei $a \in V$ und U, W endlichdim. UVRe von V . Dann gilt:

$$d(a + U, W) = \|\pi_{(U+W)^\perp}(a)\|$$

Satz. Geometrische Interpretation: Das Lot verläuft orthogonal zu den Richtungen U und V !

Aufgabe 5. Sei

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^5 \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: v$$

Bestimmen Sie den Abstand von v zu U^\perp .

Lösung.

$$d(v, U^\perp) = d(v + \{0\}, U^\perp) = \|\pi_{(U^\perp)^\perp}(v)\| = \|\pi_U(v)\| = \|v - \pi_{U^\perp}(v)\|$$

Denn es scheint leichter eine ONB von U^\perp zu finden: ein Basisvektor ist e_4 , und Gauß auf das EZS von U zeigt, dass in der Tat $\dim U = 4$ gilt, und folglich e_4 der einzige Basisvektor von U^\perp ist. Also:

$$d(v, U) = \|v - \langle v, e_4 \rangle e_4\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10}$$