

Tutorium 8

1 Positiv definite Matrizen

Satz. Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) A ist positiv definit
- (ii) Die Hauptminoren $\det A_k$ sind positiv ($A_k := (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k \times k}, k = 1, \dots, n$) (Hurwitz-Kriterium)
- (iii) Es gibt eine untere Dreiecksmatrix $G \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $A = GG^T$ (Cholesky-Zerlegung)

Satz. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit $\Rightarrow A$ regulär und diagonalisierbar

Aufgabe 1. Finden Sie eine Matrix $S \in O(3)$ so dass

$$S^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} S$$

eine Diagonalmatrix ist.

Lösung. Achtung: Die Matrix ist nicht positiv definit!

Vergleich mit Basiswechselformel: Scheinbar suchen wir eine ONB aus Eigenvektoren!

$$\begin{aligned} CP(A, \lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1) \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \\ &(\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Diagonalisierbar ist die Matrix schonmal, wir bestimmten die Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow b_3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aha; $T := (b_1 \mid b_2 \mid b_3) \in O(3)$, also $T^{-1} = T^T$ und die Behauptung folgt.

2 Isometrie

Definition. Seien $(X, d), (Y, e)$ metrische Räume. Eine Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ mit

$$d(x, y) = e(\phi(x), \phi(y)) \quad \forall x \in X, y \in Y$$

heißt Isometrie. Die Gruppe

$$\text{Iso}(X, d) := \{\phi : X \rightarrow X \mid \phi \text{ bijektive Isometrie}\} \leq \text{Sym}(X)$$

heißt Isometriegruppe des metrischen Raums (X, d) .

Beispiel (Translation). Sei V ein euklidischer (oder unitärer) Vektorraum, und $v \in V$. Die Translation

$$\phi_v : V \rightarrow V, x \mapsto x + v$$

ist eine bijektive Isometrie (denn $\phi_v^{-1} = \text{phi}_{-v}$), also $\phi_v \in \text{Iso}(V, \|\cdot\|)$.

Wegen $\phi_v(x + y) = (x + y) + v$, aber $\phi_v(x) + \phi_v(y) = (x + y) + 2v$ ist ϕ_v nur für $v = 0$ linear.

Definition. Seien V, W euklidische (oder unitäre) Vektorräume. Eine Isometrie $\Phi : V \rightarrow W$, die gleichzeitig linear ist, heißt lineare Isometrie.

Satz. Sei V euklidischer Vektorraum.

(i) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle)$ (Polarisierungsformel)

(ii) $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$ ist lineare Isometrie $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle_V = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_W$

Satz. Sei V ein euklidischer (oder unitärer) Vektorraum. Dann sind äquivalent:

- (i) $\Phi \in \text{Hom}(V, W)$ ist eine Isometrie
 - (ii) jedes ONS wird injektiv auf ein ONS abgebildet
 - (iii) eine (jede) ONB wird injektiv auf ein ONS abgebildet
 - (iv) $D_{BB}(\Phi) \in O(n)$ für eine (jede) ONB B
- ((iii), (iv) nur falls $\dim V = n < \infty$)

Beispiel (Spiegelung). Sei V ein euklidischer Vektorraum und $0 \neq v \in V$. Betrachte



Abbildung 1: Reflektion x an v^\perp

Dies führt zu:

$$\Phi_v : V \rightarrow V, x \mapsto x - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

Diese Abbildung heißt Spiegelung an der Hyperebene v^\perp . Für $x = \lambda v, y \in \langle v \rangle^\perp$ gilt:

$$\Phi_v(x) = \lambda v - 2 \frac{\langle \lambda v, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \lambda v - 2\lambda v = -\lambda v = -x$$

$$\Phi_v(y) = y - 2 \frac{\langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = y$$

was unsere Intuition einer Spiegelung bestätigt. Und Φ ist sinnvollerweise auch eine Isometrie wegen

$$\begin{aligned} \langle \Phi_v(x), \Phi_v(y) \rangle &= \left\langle x - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, y - 2 \frac{\langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \right\rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 2 \left\langle \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, y \right\rangle - 2 \left\langle x, \frac{\langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \right\rangle + 4 \left\langle \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, \frac{\langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \right\rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle v, y \rangle - 2 \frac{\langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle x, v \rangle + 4 \frac{\langle x, v \rangle \langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle \langle v, v \rangle} \langle v, v \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Jetzt wäre es noch schön, wenn es für je zwei Vektoren v, w gleicher Länge eine Spiegelung gibt, die v mit w vertauscht (vgl. letztes Übungsblatt). Die Spiegelebene muss natürlich orthogonal zum Verbindungsvektor $v - w$ stehen. Es gilt tatsächlich:

$$\Phi_{v-w}(v) = \Phi_{v-w}\left(\frac{1}{2}(v+w) + \frac{1}{2}(v-w)\right) = v - 2 \frac{\langle \frac{1}{2}(v-w), v-w \rangle}{\langle v-w, v-w \rangle} (v-w) = v - (v-w) = w$$

wegen $\langle v+w, v-w \rangle = 0$ (und vice versa).

Aufgabe 2. Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$.

- (i) Bestimmen Sie die Matrix, die bezüglich der Standardbasis die Spiegelung an v^\perp beschreibt.
- (ii) Zeigen Sie, dass es unendlich viele $p, q \in \mathbb{Q}$ gibt mit $p^2 + q^2 = 1$.

Lösung. Zu (i): Wir erinnern uns:

$$\Phi_v \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - 2 \frac{\sum_j x_j v_j}{\langle v, v \rangle} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Die i -te Zeile dieses Vektors ist:

$$x_i - 2 \frac{\sum_j x_j v_j}{\langle v, v \rangle} v_i$$

Es gilt also:

$$\Phi_v(x) = Ax \quad \text{mit } A := (a_{i,j}), \quad a_{i,j} := \delta_{i,j} - \frac{2v_i v_j}{\langle v, v \rangle}$$

Zu (ii): Wähle einfach $v \in \mathbb{Q}^2$ und betrachte die erste Spalte der Matrix $A \in O(2)$: Diese ist nämlich normiert und besteht nur aus Einträgen aus \mathbb{Q} .

Beispiel (Drehkästchen). Wir wollen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ um θ um den Ursprung drehen. Wir können den gedrehten Vektor $\Phi(x)$ mit Hilfe der ONB $\{x, x^\perp\}$, $x^\perp := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \cos(\theta)x + \sin(\theta)x^\perp \\ &= \cos(\theta)(x_1e_1 + x_2e_2) + \sin(\theta)(-x_2e_1 + x_1e_2) \\ &= (\cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2)e_1 + (\cos(\theta)x_2 + \sin(\theta)x_1)e_2 \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{=: D_\theta} x \end{aligned}$$

D_θ heißt Drehkästchen zum Winkel θ und ist offenbar orthogonal; da die Standardbasis ONB ist, ist die Drehung Φ eine Isometrie.

Weiterhin gilt $SO(2) = \{D_\theta \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$!

Beispiel (Drehung in zweidimensionalen Unterräumen). Analog ist

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & & & \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

die Abbildungsmatrix einer Drehung in der Ebene $\langle b_1, b_2 \rangle$ (für eine ONB $\{b_i\}$).

Satz (Eulerwinkel). Jede Matrix $A \in SO(3)$ lässt sich darstellen wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(für geeignete $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$)

Bemerkung.



Abbildung 2: Veranschaulichung einer solchen schrittweisen Drehung

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass

$$A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -12 \\ 0 & 13 & 0 \\ 12 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

in $SO(3)$ liegt, und zerlegen Sie A wie im Satz.

Lösung. Es gilt:

$$Ae_1 = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, Ae_2 = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}, Ae_3 = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren haben Einheitslänge und stehen orthogonal aufeinander. Also $A \in O(3)$, und wegen $\det A = \frac{1}{13^3}(13 \cdot (5^2 + 12^2)) = 1$ sogar $A \in SO(3)$.

Wir setzen an:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -d \\ 0 & d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -f & 0 \\ f & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -bc & bd \\ b & ac & -ad \\ 0 & d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -f & 0 \\ f & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} ae - bcf & -af - bce & bd \\ be + acf & -bf + ace & -ad \\ df & de & c \end{pmatrix} = A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -12 \\ 0 & 13 & 0 \\ 12 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = \frac{5}{13} \text{ und } bd \neq 0 \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow a = e = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -bf \frac{5}{13} & 0 & bd \\ 0 & -bf & 0 \\ df & 0 & \frac{5}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -12 \\ 0 & 13 & 0 \\ 12 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow bd = -12 = -df \Rightarrow d = -f \Rightarrow 1 = -bf = b^2 \Rightarrow \text{wähle } b = 1, f = -1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ -d & 0 & \frac{5}{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -12 \\ 0 & 13 & 0 \\ 12 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d = -\frac{12}{13}$$

Wir verifizieren jetzt noch, dass Darstellungen $a = \cos(\gamma)$, $b = \sin(\gamma)$, ... möglich sind:

$$a = 0 \in [-1, 1] \text{ und } a^2 + b^2 = 0^2 + 1^2 = 1$$

$$c = \frac{5}{13} \in [-1, 1] \text{ und } c^2 + d^2 = 5^2 + 12^2 13^2 = 1$$

$$e = 0 \in [-1, 1] \text{ und } e^2 + f^2 = 0^2 + 1^2 = 1$$

Das klappt also!