Tutorium 9

1 Isometrien (Teil 2)

Satz. Sei V euklidisch und $\Phi \in \mathrm{Iso}(V)$. Dann gilt:

(i) Φ linear $\Leftrightarrow \Phi(0) = 0$

(ii) es existiert eine lineare Isometrie Φ_0 und $v \in V$ mit:

$$\Phi(x) = v + \Phi_0(x) \quad \forall x \in V$$

Satz. Sei V euklidisch oder unitär, $\dim V < \infty$ und $\Phi : V \to V$ eine lineare Isometrie. Dann gilt:

$$U \subseteq V \text{ }\Phi\text{-invarianter UVR} \quad \Rightarrow \quad U^\perp \text{ }\Phi\text{-invarianter UVR}$$

Bemerkung (V unitär). $\mathrm{CP}(\Phi, x)$ hat Grad $n = \dim V$, also eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$.
Induktiv erhalten wir mit dem Satz von oben, dass Φ bezüglich einer ONB aus Eigenvektoren diagonalisierbar ist.

Bemerkung (V euklidisch). $\mathrm{CP}(\Phi, X)$ hat Grad $n = \dim V$, hat also eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$.

<u>1. Fall</u> ($\lambda \in \mathbb{R}$):
Wir erhalten einen EW 1 oder -1 mit zugehörigem Eigenvektor v.

<u>2. Fall</u> ($\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$): Da $\mathrm{CP}(\Phi, X)$ ein reelles Polynom ist, ist dann auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle, folglich:

$$\underbrace{(X - \lambda)(X - \overline{\lambda})}_{= X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda) X + 1 \ \in \mathbb{R}[X]} \quad \mid \mathrm{CP}(\Phi, X)$$

Wähle $0 \neq v \in \mathrm{Kern}\big((\Phi - \lambda\,\mathrm{id})(\Phi - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})\big)$ – das ist möglich, denn sonst wäre λ kein komplexer EW. Und $\{v, \Phi(v)\}$ sind linear unabhängig, denn sonst wäre λ ein reeller EW. Aber nach Wahl von v gilt:

$$\Phi(v)^2 = 2\,\mathrm{Re}(\lambda)\Phi(v) - v$$

Folglich ist $U := \langle v, \Phi(v)\rangle$ ein Φ-invarianter UVR, und $\Phi|_U$ hat bzgl. jeder ONB ein Drehkästchen D_ϕ als Abbildungsmatrix! Achtung: $\{v, \Phi(v)\}$ ist i.A. keine ONB!

$X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda)X + 1$ ist nach obiger Rechnung gerade das charakteristische Polynom von $\Phi|_U$, also gilt:

$$\begin{aligned} X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda)X + 1 &= \det(XI_2 - D_\phi) = (X - \cos(\phi))^2 + \sin(\phi) = X^2 - 2\cos(\phi)X + 1 \\ \Rightarrow\ \mathrm{Re}(\lambda) &= \cos(\phi) \end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir mit dem Satz von oben:

Satz (Normalform). (i) Sei $A \in U(n)$. Dann existiert eine Matrix $T \in U(n)$ so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

(ii) Sei $A \in O(n)$. Dann existiert eine Matrix $T \in O(n)$ so dass $T^{-1}AT$ die folgende Form besitzt:

$$\begin{pmatrix} I_{d_+} & & & & \\ & I_{d_-} & & & \\ & & D_{\phi_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_{\phi_k} \end{pmatrix}$$

mit $d_+ = \dim \mathrm{Eig}(A, 1)$, $d_- = \dim \mathrm{Eig}(A, -1)$, $k = \frac{1}{2}(n - d_+ - d_-)$ und $\phi_i \in (0, 2\pi)$.

Aufgabe 1. Sei

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -7 & 7 \\ 1 & -1 & -7 & -7 \\ -7 & 7 & -1 & -1 \\ -7 & -7 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in O(4)$$

(a) Berechnen Sie die EWe von $(A + A^T)$ und eine Diagonalgestalt D.

(b) Bestimmen Sie daraus die reelle Normalform $N_\mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie unabhängig davon die komplexe Normalform $N_\mathbb{C}$.

(d) Zeigen Sie, dass $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -i \end{smallmatrix}\right)$ Eigenvektoren von $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$ sind.

(e) Finden Sie eine Matrix $U \in U(4)$ mit $\overline{U}^T N_{\mathbb{R}} U = N_{\mathbb{C}}$.

Lösung. (a)

$$
\begin{aligned}
A + A^T &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{7}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{7}{5} \\ -\frac{7}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad \mathrm{CP}(A + A^T, X) &= (X + \frac{8}{5})^2 (X - \frac{6}{5})^2 \\
\rightsquigarrow D :&= \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & & & \\ & -\frac{8}{5} & & \\ & & \frac{6}{5} & \\ & & & \frac{6}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(b) Sei $O^T A O = N_{\mathbb{R}}$ die reelle Normalform von A, dann ist

$$
O^T (A + A^T) O = O^T A O + O^T A^T O = O^T A O + (O^T A O)^T = N_{\mathbb{R}} + N_{\mathbb{R}}^T
$$

diagonal, und also im wesentlich ähnlich zu D!
Jeder EW 1 bzw. -1 von $N_{\mathbb{R}}$ entspricht also einem EW 2 bzw. -2 von D, und für jedes Drehkästchen D_ϕ erhalten wir zwei EWe $2\cos(\phi) \in (-2, 2)$.

In unserem Fall erhalten wir wegen $\sin^2 + \cos^2 = 1$ also:

$$
N_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & & \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & & \\ & & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ & & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}
$$

(c) Sei $\overline{U}^T AU = N_{\mathbb{C}}$ die komplexe Normalform von A, dann ist

$$\overline{U}^T (A + A^T)U = \overline{U}^T AU + \overline{U}^T \overline{A}^T U = \overline{U}^T AU + \overline{(\overline{U}^T AU)}^T = N_{\mathbb{C}} + \overline{N_{\mathbb{C}}}^T$$

nicht nur diagonal, sondern insbesondere reell, und also im wesentlich ähnlich zu D.
Und für jeden komplexen EW λ von A erhalten wir einen EW $\lambda + \overline{\lambda} = 2Re(\lambda)$ von $A + A^T$.

In unserem Fall erhalten wir wegen $|\lambda| = 1$ also:

$$N_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} + \frac{3}{5} & & & \\ & -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} & & \\ & & \frac{3}{5} + \frac{4}{5} & \\ & & & \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

(d) Es gilt passend zu (c):

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - ib \\ b + ai \end{pmatrix} = (a - ib) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib \\ b - ai \end{pmatrix} = (a + ib) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

(e) Klar, wir diagonalisieren jedes Drehkästchen mit der unitären Matrix $\hat{U} := \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{smallmatrix} \right)$, also:

$$U := \begin{pmatrix} \hat{U} & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{pmatrix}$$

Satz. Sei V euklidisch, $\dim V = n$ und $\Phi : V \to V$ eine lineare Isometrie. Dann existieren Spiegelungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, $k \leq n$ so dass gilt:

$$\Phi = \sigma_k \circ \ldots \circ \sigma_1$$

Beweis. Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine ONB. Dann setzen wir:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 := \sigma_{\Phi(b_1)-b_1} \circ \Phi \\ \Rightarrow\ &\Phi_1(b_1) = b_1 \end{aligned}$$

Und nun:

$$\begin{aligned} &\Phi_2 := \sigma_{\Phi_1(b_2)-b_2} \circ \Phi_1 \\ \Rightarrow\ &\Phi_2(b_1) = b_1 \quad \text{denn } b_1 \perp b_2 \text{ und } b_1 = \Phi_1(b_1) \perp \Phi_1(b_2) \quad \Rightarrow \quad b_1 \perp \Phi_1(b_2) - b_2 \\ &\Phi_2(b_2) = b_2 \end{aligned}$$

und so weiter was die Behauptung liefert. □

Aufgabe 2. Jede Isometrie des $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Produkt von höchstens drei Spiegelungen darstellen. Wieviele Isometrien braucht man jeweils mindestens, und wie eindeutig ist die Darstellung dann?

Lösung. Wir treffen eine Fallunterscheidung anhand der verschiedenen möglichen Normalformen:

(a) Identität

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{0 Spiegelungen, also eindeutig}$$

(b) Spiegelungen

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{1 Spiegelung, EV bis auf Vorzeichen eindeutig} \Rightarrow \text{Spiegelung eindeutig}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{2 Spiegelungen, unendlich viele normierte orthogonale EVen da 2D-Eigenraum}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{3 Spiegelungen, unendlich viele normierte orthogonale EVen da 3D-Eigenraum}$$

(c) Drehung

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & D_\phi \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{2 Spiegelungen, unendlich viele normierte OGB-Vektoren der Drehebene}$$

(d) Drehspiegelung

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & D_\phi \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{3 Spiegelungen, EV eindeutig, aber sonst siehe Drehung}$$

Aufgabe 3. Jede Drehung Φ als sich als Produkt von zwei Spiegelungen schreiben. Bestimmen Sie aus solch einer Zerlegung Drehachse und -ebene.

Lösung. Sei $\Phi = \sigma_2 \circ \sigma_1$ die Zerlegung, und U_i die jeweilige Spiegelebene. Wegen $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$ ist der Schnitt nichttrivial, es existiert also ein normiertes $0 \neq v \in U_1 \cap U_2$ mit:

$$\Phi(v) = \sigma_2(\sigma_1(v)) = \sigma_2(v) = v$$

v ist also die Drehachse! Und die Drehebene ist dann durch $\langle v \rangle^{\perp}$ gegeben.
Falls $\Phi = \mathrm{id}$, so ist v natürlich frei wählbar!

Die Abbildungsmatrizen bzgl. ONBen $\{v, \ldots\}$ sind dann nämlich in Normalform mit $\phi \in [0, 2\pi)$ (warum?):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

2 Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition. Sei V euklidisch oder unitär. $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ heißt selbstadjungiert, falls gilt:

$$\langle \Phi(x), y \rangle = \langle x, \Phi(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Bemerkung. Für die Abbildungsmatrix $D_{BB}(\Phi) = (d_{i,j})$ bzgl. einer ONB B gilt:

$$d_{i,j} = \langle \Phi(b_j), b_i \rangle = \langle b_j, \Phi(b_i) \rangle = \overline{\langle \Phi(b_i), b_j \rangle} = \overline{d_{j,i}}$$

$$\Rightarrow \; D_{BB}(\Phi) = \overline{D_{BB}(\Phi)}^T$$