

# Tutorium 9

## 1 Isometrien (Teil 2)

**Satz.** Sei  $V$  euklidisch und  $\Phi \in \text{Iso}(V)$ . Dann gilt:

- (i)  $\Phi$  linear  $\Leftrightarrow \Phi(0) = 0$
- (ii) es existiert eine lineare Isometrie  $\Phi_0$  und  $v \in V$  mit:

$$\Phi(x) = v + \Phi_0(x) \quad \forall x \in V$$

**Satz.** Sei  $V$  euklidisch oder unitär,  $\dim V < \infty$  und  $\Phi : V \rightarrow V$  eine lineare Isometrie. Dann gilt:

$$U \subseteq V \text{ } \Phi\text{-invarianter UVR} \Rightarrow U^\perp \text{ } \Phi\text{-invarianter UVR}$$

**Bemerkung** ( $V$  unitär).  $\text{CP}(\Phi, x)$  hat Grad  $n = \dim V$ , also eine Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Induktiv erhalten wir mit dem Satz von oben, dass  $\Phi$  bezüglich einer ONB aus Eigenvektoren diagonalisierbar ist.

**Bemerkung** ( $V$  euklidisch).  $\text{CP}(\Phi, X)$  hat Grad  $n = \dim V$ , hat also eine Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

1. Fall ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ):

Wir erhalten einen EW 1 oder  $-1$  mit zugehörigem Eigenvektor  $v$ .

2. Fall ( $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ): Da  $\text{CP}(\Phi, X)$  ein reelles Polynom ist, ist dann auch  $\bar{\lambda}$  eine Nullstelle, folglich:

$$\underbrace{(X - \lambda)(X - \bar{\lambda})}_{= X^2 - 2\text{Re}(\lambda)X + 1 \in \mathbb{R}[X]} \mid \text{CP}(\Phi, X)$$

Wähle  $0 \neq v \in \text{Kern}((\Phi - \lambda \text{id})(\Phi - \bar{\lambda} \text{id}))$  – das ist möglich, denn sonst wäre  $\lambda$  kein komplexer EW. Und  $\{v, \Phi(v)\}$  sind linear unabhängig, denn sonst wäre  $\lambda$  ein reeller EW. Aber nach Wahl von  $v$  gilt:

$$\Phi(v)^2 = 2\text{Re}(\lambda)\Phi(v) - v$$

Folglich ist  $U := \langle v, \Phi(v) \rangle$  ein  $\Phi$ -invarianter UVR, und  $\Phi|_U$  hat bzgl. jeder ONB ein Drehkästchen  $D_\phi$  als Abbildungsmatrix! Achtung:  $\{v, \Phi(v)\}$  ist i.A. keine ONB!

$X^2 - 2\text{Re}(\lambda)X + 1$  ist nach obiger Rechnung gerade das charakteristische Polynom von  $\Phi|_U$ , also gilt:

$$\begin{aligned} X^2 - 2\text{Re}(\lambda)X + 1 &= \det(XI_2 - D_\phi) = (X - \cos(\phi))^2 + \sin(\phi) = X^2 - 2\cos(\phi)X + 1 \\ \Rightarrow \text{Re}(\lambda) &= \cos(\phi) \end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir mit dem Satz von oben:



(c) Sei  $\bar{U}^T AU = N_{\mathbb{C}}$  die komplexe Normalform von  $A$ , dann ist

$$\bar{U}^T (A + A^T) U = \bar{U}^T AU + \bar{U}^T \bar{A}^T U = \bar{U}^T AU + \overline{(\bar{U}^T AU)}^T = N_{\mathbb{C}} + \overline{N_{\mathbb{C}}}^T$$

nicht nur diagonal, sondern insbesondere reell, und also im wesentlichen ähnlich zu  $D$ .

Und für jeden komplexen EW  $\lambda$  von  $A$  erhalten wir einen EW  $\lambda + \bar{\lambda} = 2\operatorname{Re}(\lambda)$  von  $A + A^T$ .

In unserem Fall erhalten wir wegen  $|\lambda| = 1$  also:

$$N_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} + \frac{3}{5} & & & \\ & -\frac{4}{5} - \frac{3}{5} & & \\ & & \frac{3}{5} + \frac{4}{5} & \\ & & & \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

(d) Es gilt passend zu (c):

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - ib \\ b + ai \end{pmatrix} = (a - ib) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib \\ b - ai \end{pmatrix} = (a + ib) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

(e) Klar, wir diagonalisieren jedes Drehkästchen mit der unitären Matrix  $\hat{U} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ , also:

$$U := \begin{pmatrix} \hat{U} & 0 \\ 0 & \hat{U} \end{pmatrix}$$

**Satz.** Sei  $V$  euklidisch,  $\dim V = n$  und  $\Phi : V \rightarrow V$  eine lineare Isometrie. Dann existieren Spiegelungen  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ ,  $k \leq n$  so dass gilt:

$$\Phi = \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1$$

*Beweis.* Sei  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine ONB. Dann setzen wir:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &:= \sigma_{\Phi(b_1)-b_1} \circ \Phi \\ \Rightarrow \Phi_1(b_1) &= b_1 \end{aligned}$$

Und nun:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &:= \sigma_{\Phi_1(b_2)-b_2} \circ \Phi_1 \\ \Rightarrow \Phi_2(b_1) &= b_1 \quad \text{denn } b_1 \perp b_2 \text{ und } b_1 = \Phi_1(b_1) \perp \Phi_1(b_2) \Rightarrow b_1 \perp \Phi_1(b_2) - b_2 \\ \Phi_2(b_2) &= b_2 \end{aligned}$$

und so weiter was die Behauptung liefert.  $\square$

**Aufgabe 2.** Jede Isometrie des  $\mathbb{R}^3$  lässt sich als Produkt von höchstens drei Spiegelungen darstellen. Wieviele Isometrien braucht man jeweils mindestens, und wie eindeutig ist die Darstellung dann?

*Lösung.* Wir treffen eine Fallunterscheidung anhand der verschiedenen möglichen Normalformen:

(a) Identität

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 0 \text{ Spiegelungen, also eindeutig}$$

(b) Spiegelungen

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 1 \text{ Spiegelung, EV bis auf Vorzeichen eindeutig} \Rightarrow \text{Spiegelung eindeutig}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 2 \text{ Spiegelungen, unendlich viele normierte orthogonale EVen da 2D-Eigenraum}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 3 \text{ Spiegelungen, unendlich viele normierte orthogonale EVen da 3D-Eigenraum}$$

(c) Drehung

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & D_\phi & \\ & & \end{pmatrix} \rightsquigarrow 2 \text{ Spiegelungen, unendlich viele normierte OGB-Vektoren der Drehebene}$$

(d) Drehspiegelung

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & D_\phi & \\ & & \end{pmatrix} \rightsquigarrow 3 \text{ Spiegelungen, EV eindeutig, aber sonst siehe Drehung}$$

**Aufgabe 3.** Jede Drehung  $\Phi$  lässt sich als Produkt von zwei Spiegelungen schreiben. Bestimmen Sie aus solch einer Zerlegung Drehachse und -ebene.

*Lösung.* Sei  $\Phi = \sigma_2 \circ \sigma_1$  die Zerlegung, und  $U_i$  die jeweilige Spiegelebene. Wegen  $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$  ist der Schnitt nichttrivial, es existiert also ein normiertes  $0 \neq v \in U_1 \cap U_2$  mit:

$$\Phi(v) = \sigma_2(\sigma_1(v)) = \sigma_2(v) = v$$

$v$  ist also die Drehachse! Und die Drehebene ist dann durch  $\langle v \rangle^\perp$  gegeben. Falls  $\Phi = \text{id}$ , so ist  $v$  natürlich frei wählbar!

Die Abbildungsmatrizen bzgl. ONBen  $\{v, \dots\}$  sind dann nämlich in Normalform mit  $\phi \in [0, 2\pi)$  (warum?):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

## 2 Selbstadjungierte Endomorphismen

**Definition.** Sei  $V$  euklidisch oder unitär.  $\Phi \in \text{End}(V)$  heißt selbstadjungiert, falls gilt:

$$\langle \Phi(x), y \rangle = \langle x, \Phi(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

**Bemerkung.** Für die Abbildungsmatrix  $D_{BB}(\Phi) = (d_{i,j})$  bzgl. einer ONB  $B$  gilt:

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \langle \Phi(b_j), b_i \rangle = \langle b_j, \Phi(b_i) \rangle = \overline{\langle \Phi(b_i), b_j \rangle} = \overline{d_{j,i}} \\ \Rightarrow D_{BB}(\Phi) &= \overline{D_{BB}(\Phi)}^T \end{aligned}$$